ANALISI MATEMATICA 1 e MATEMATICA A

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 Settembre 2012

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{4\log^2 x + 2\log x + 1}$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno, eventuali simmetrie e periodicità.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda di $f(x)$).

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}\,dx.$$

(b) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Esercizio 3 (7 punti) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n+1)^n}$$

Esercizio 4 (7 punti) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^2) - \sin x}{1-\cos x + x^4 \log x}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l'appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1 e MATEMATICA A

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 Settembre 2012

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{3\log^2 x + 2\log x + 1}$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno, eventuali simmetrie e periodicità.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda di $f(x)$).

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-3)}\,dx.$$

(b) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-3)}\,dx\,.$$

Esercizio 3 (7 punti) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n+1)!}$$

Esercizio 4 (7 punti) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - 1 - \log(1+x)}{\sin(x^2) + x^3\log x}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l'appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Soluzioni del **TEMA 1**

Esercizio 1

(a) Si osservi che $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$, ove $g(x) = p(\log x)$ e $p(t) = 4t^2 + 2t + 1$. Poiché il polinomio $4t^2 + 2t + 1$ ha discriminante negativo, il denominatore di f non si annulla mai. Per la presenza della funzione $\log x$ risulta quindi

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

La funzione non presenta simmetrie o periodicità ed è sempre positiva.

(b) Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Non ha senso cercare eventuali asintoti obliqui per $x \to +\infty$, perché f tende a $+\infty$ con ordine maggiore di uno.

(c) La funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio come conseguenza dei teoremi sulla continuità e sulla derivabilità del quoziente e della composizione di funzioni. Risulta, inoltre,

$$f'(x) = \frac{8x\log^2 x - 4x\log x}{g^2(x)}\,.$$

La funzione risulta allora crescente sugli intervalli $(0, 1)$ e $(e^{1/2}, +\infty)$, decrescente in $(1, e^{1/2})$.

f presenta un massimo relativo in $x = 1$ (ove assume il valore 1) e un mnimo relativo in $e^{1/2}$, ove assume il valore $e/3$. La funzione non ha nè massimi nè minimi assoluti.

(d) Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{8x\log^2 x - 4x\log x}{g^2(x)} = 0\,.$$

Esercizio 2

(a). Per il calcolo dell'integrale definito, tramite la sostituzione $x = t^2$ (che implica "$dx = 2t\,dt$", $x = 3$ ed $x = 4$ da sostituire con $t = \sqrt{3}$ e $t = 2$ rispettivamente) otteniamo

$$I := \int_3^4 \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{t^2-2}\,dt.$$

Osserviamo che si ha $t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$; inoltre l'equazione

$$\frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} = \frac{1}{t^2-2}$$

implica: $A = \sqrt{2}/4$ e $B = -\sqrt{2}/4$. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{t^2-2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\log|t-\sqrt{2}| - \log|t+\sqrt{2}|\Big]_{\sqrt{3}}^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right].
\end{aligned}$$

(b). Essendo l'integranda continua solo su $(0,2)$, si deve studiare il suo comportamento sia intorno al punto $x=0$ che al punto $x=2$. Per il primo notiamo che

$$\frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \sim -\frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge.

Per $x=2$ osserviamo

$$\frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \sim \frac{(x-2)^{-1}}{\sqrt{2}} \qquad \text{per } x \to 2^-.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio diverge.

(*In alternativa, si può usare il risultato del punto (a) e la definizione di integrale improprio:* $\int_0^2 \cdots = \lim_{\xi\to 0^+}\int_\xi^1 \cdots + \lim_{\eta\to 2^-}\int_1^\eta \ldots$ *dove il primo limite è convergente mentre il secondo è divergente.)*

Esercizio 3 Essendo una serie a termini positivi, si può provare ad usare il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1)+1)!}{(n+1+1)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(n+2)^n(n+2)}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \\
&= \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} = \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

dove nel calcolo del limite si è tenuto conto che $\lim_n(1-\frac{1}{n+2})^{n+2} = e^{-1}$, $\lim_n \frac{n}{n+2} = 1$ e $\lim_n \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)} = +\infty$.

Quindi $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e, per il principio del rapporto, la serie diverge.

Esercizio 4

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^2)-\sin x}{1-\cos x + x^4\log x}.$$

Scriviamo lo sviluppo di McLaurin del numeratore:

$$\log(1+x+x^2)-\sin x = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per $x\to 0$.

Al denominatore:

$$1-\cos x + x^4\log x = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per $x \to 0$, dove abbiamo tenuto conto che $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4\log x}{x^2} = 0$ quindi $x^4\log x = o(x^2)$. Quindi facendo il quoziente si ottiene che il limite è $= 1$.