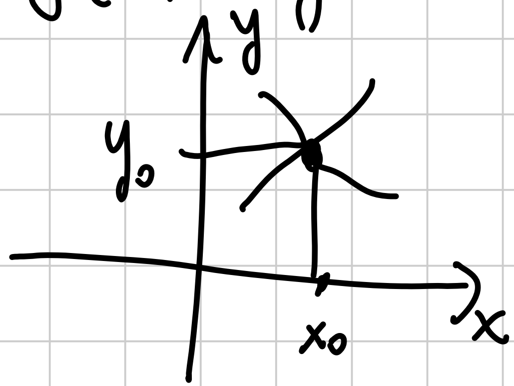
Eq. differenziali del primo ordine in forma <u>normale</u>

$$y' = f(x, y)$$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\exists$ e $!$

dipenderà da f_y ...



- a variabili separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

- eq. <u>lineari</u> del primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x)$$

<u>es.</u> $y' = \underbrace{2x}_{a} y + \underbrace{x}_{b} \longleftrightarrow y' = 2xy$

$$y' = \frac{1}{x} y + \operatorname{sen} x \leftrightarrow y' = \frac{1}{x} y$$

$$y' = \operatorname{sen}(xy) \quad \text{NO lineare}$$

$$\boxed{y' = a(x)\,y + b(x)} \quad (L)$$

$b(x) = 0 \qquad y' = a(x)\,y$ eq. omogenea associata ad L

1° passo mi cerco la soluzione dell'eq. omogenea associata

$$y' = a(x)\,y \qquad y \equiv 0$$

$$\frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$$

$$\log|y| = \int a(x)\,dx + C$$

$$|y(x)| = e^{\int a(x)\,dx} \cdot \overbrace{e^{C}}^{C} = C\,e^{\int a(x)\,dx}$$

$$y(x) = C\,e^{\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Quindi tutte le soluzioni di

$y' = a(x)y$, dove $a(x)$ continua in I,

sono del tipo $y(x) = C e^{\int a(x)\,dx}$, $C \in \mathbb{R}$.

Problema di Cauchy corrispondente

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx}}$$

es.

$$y' = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{a(x)} \cdot y \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + C$$

$$\log\sqrt{x^2+1}$$

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

① $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+1}\, y \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$$3 = c\sqrt{0+1}$$

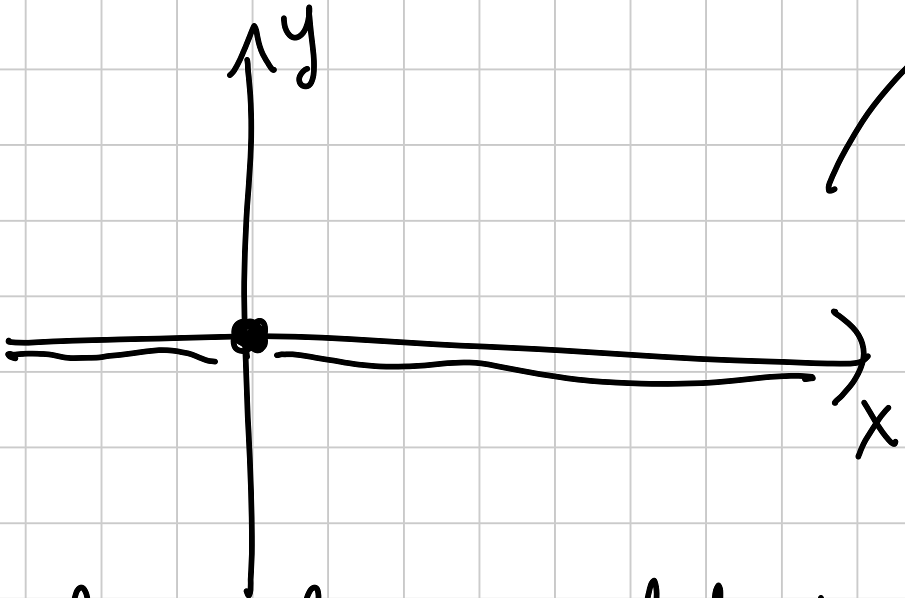
$$3 = c$$

$$y(x) = 3\sqrt{x^2+1}$$

es. controllare che questa $y(x)$ sia proprio soluzione

② $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+1}\, y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+1}$$



non posso dividere per y

$$y \equiv 0$$

la soluzione del p. di Cauchy n. 2 è

$$y(x) \equiv 0$$

Eq. lineari <u>non omogenee</u>

$$\boxed{y' = a(x)\,y + b(x)} \qquad (N)$$

Si può dimostrare che tutte le soluzioni $y(x)$ di questa equazione hanno la seguente struttura

$$y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{soluz. eq. omogenea associata}} + \overbrace{\tilde{y}(x)}^{\text{soluzione particolare di } (N)}$$

Si indica con soluzione generale (o integrale generale) l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.

$$y(x) = \underbrace{C e^{\int a(x)\,dx}}_{y_0(x)} + \tilde{y}(x)$$

Come faccio ora a trovare $\tilde{y}(x)$, soluzione particolare di $y' = ay + b$?

Metodo di <u>variazione</u> delle costanti

cerco $\tilde{y}(x)$ della forma

$$\tilde{y}(x) = K(x)\, e^{\int a(x)\,dx}$$

$K(x)$ è una funzione incognita che cerco di determinare imponendo che $\tilde{y}(x)$ risolva $y' = ay + b$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$ primitiva di $a(x)$

$$\tilde{y}(x) = K(x)\, e^{\int a(x)\,dx} = \underbrace{K(x)\, e^{A(x)}}_{} = \tilde{y}$$

$$A' = a$$

impongo che $\tilde{y}$ risolve

$$\boxed{\tilde{y}'(x) = a(x)\,\tilde{y}(x) + b(x)}$$

$$\tilde{y}' = K' e^{A} + K e^{A} a$$

$$\underbrace{K' e^{A} + \cancel{K e^{A}} \cdot a = a \cancel{K e^{A}}} + b$$

y' $\qquad$ y $\qquad$ $\tilde{y} = K(x)\underline{e^{A(x)}}$

$$K'(x)\, e^{A(x)} = b(x) \Rightarrow K'(x) = \underline{b(x)\, e^{-A(x)}}$$

$$K(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx$$

quindi $\qquad \boxed{\tilde{y}(x) = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx}$

Riassumendo: la soluzione particolare di

$$y' = a(x)\,y + b(x) \quad \text{è}$$

$$\tilde{y}(x) = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx$$

dove $A(x) = \int a(x)\, dx$

Quindi la soluzione generale dell'equazione lineare $y' = a(x)\,y + b(x)$ è

$$\boxed{y(x) = \underbrace{C\,e^{A(x)}}_{C\,e^{\int a(x)\,dx}} + e^{A(x)}\int b(x)\,e^{-A(x)}\,dx \quad \text{dove } A(x) = \int a(x)\,dx}$$

Formula risolutiva delle eq. lineari

$$\underbrace{C\,e^{\int a(x)\,dx}}$$

y_0 = soluz. eq. lineare omogenea

5. $$y' = \underbrace{-\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 4x}{x^2}}_{b(x)}$$

$x \neq 0$ la risolvo in $x > 0$

$$A(x) = \int -\frac{2}{x}\, dx = -2 \log x = \log \frac{1}{x^2}$$

$$A = -2\log x$$

$$-A = 2\log x$$

$$= \log x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\log \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

Scriviamo la formula risolutrice

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(C + \int \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{e^{\log x^2}}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(C + \int \operatorname{sen} 4x \, dx\right) \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(C - \frac{1}{4}\cos 4x\right)$$

Pb. di Cauchy corrispondente

$$\begin{cases} y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\sin 4x}{x^2} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(C - \frac{1}{4}\cos 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

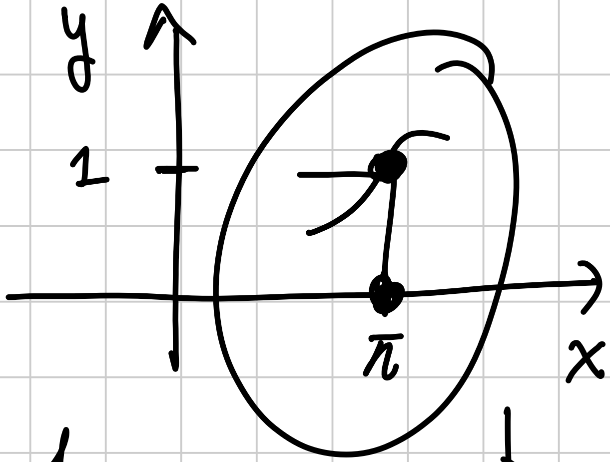
$$0 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}\left(C - \frac{1}{4}\right)$$

$$C = 1/4$$

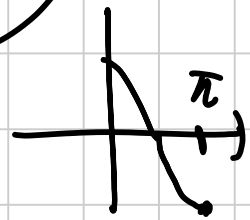
$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right)}$$

<u>es. 2</u>

$$\begin{cases} y' = \operatorname{tg} x \; y + 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$



$a(x) = \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $b(x) = 1$



$$A(x) = \int \operatorname{tg} x \; dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx =$$

$$= -\log|\cos x| =$$

$$= -\log(-\cos x) =$$

Cerco una soluzione vicina a $x = \pi$ dove $\cos x < 0$.

$$= \log\left(\frac{1}{-\cos x}\right) = A(x)$$

$$e^{A(x)} = -\frac{1}{\cos x}$$

$$-A = \log(-\cos x)$$

$$e^{-A(x)} = e^{\log(-\cos x)} =$$

$$= -\cos x$$

Formula risolutiva

$$y(x) = -\frac{1}{\cos x}\left(C + \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{\cos x}\left(C - \operatorname{sen} x\right)$$

Soluzione generale dell'equazione in un intorno di $x = \pi$

$$y(\pi) = 1 \qquad \cos\pi = -1$$

$$1 = -\frac{1}{-1}\left(C - \operatorname{sen}\pi\right) = C$$

$$y(x) = -\frac{1}{\cos x}\left(1 - \operatorname{sen} x\right) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$$

verificare che
tale y è soluzione
del problema di Cauchy

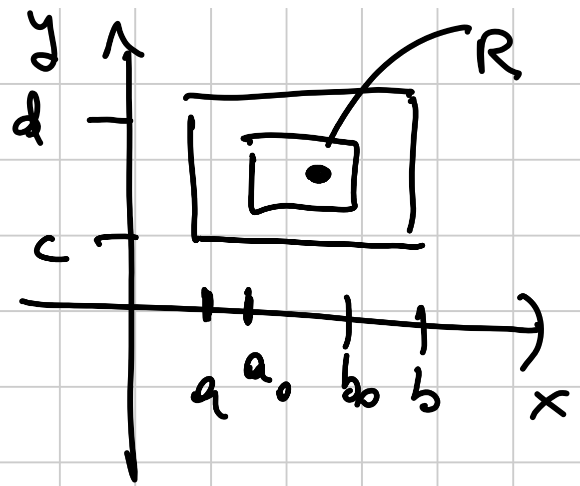
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PC

Pb. di Cauchy
per eq. del I° ordine
in forma
normale

- esiste sempre la soluzione?
- se esiste è unica o ce ne possono essere di più?

Teorema (di Cauchy)



$f : (a,b)\times(c,d) \to \mathbb{R}$ continua

e tale che $\forall R \subseteq [a,b]\times[c,d]$

$\exists L_R$ t.c.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$$

(locale Lipschitzianità)

(x,y_1) e $(x,y_2) \in R$

allora $\exists!$ soluzione del (PC) in

$(a_0,b_0) \subseteq (a,b)$, $y(x) \in C((a_0,b_0))$

OSS. È un teorema di $\exists$ **locale**
perché la soluzione non esiste
in tutto (a,b) ma in un suo
subintervallo (a_0,b_0) t.c. $x_0 \in (a_0,b_0)$.

OSS. Lipschitzianità di $f(x,y)$

$$y' = f(x,y)$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|,$$

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L$$

$$\Uparrow$$

$$|f_y(x,y)| \leq L$$

Se la f_y è limitata la lipschitzianità è verificata