Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11 (Canale 1)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica

Valentina Casarino

Appunti sulle superfici

1. Superfici regolari

Ricordiamo che si dice *curva* in $\mathbb{R}^3$ una funzione continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, ove I è un intervallo della retta reale. L'immagine di γ, che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, si dice *sostegno della curva.* Inoltre γ si dice *semplice* se è iniettiva.

Introduciamo ora il concetto di superficie (in forma parametrica), ottenuto sostituendo all'intervallo I un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1. Sia D un aperto connesso in $\mathbb{R}^2$. Diciamo **superficie** in $\mathbb{R}^3$ una funzione continua

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 .$$

L'insieme immagine di σ

$$\Sigma := \sigma(D) = \{\sigma(u,v) : (u,v) \in D\}$$

viene detto il *sostegno* della curva. Se σ è iniettiva, diciamo che la superficie è *semplice.*

Le equazioni

$$\begin{cases} x = \sigma_1(u,v) \\ y = \sigma(u,v) \\ z = \sigma_3(u,v) \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* della superficie, mentre u e v sono i *parametri* di σ.

Esempio 1. I piani nello spazio sono esempi di superfici.

Esempio 2. La superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v\,, & 0 < u < \pi \\ y = \sin u \sin v\,, & 0 < v < 2\pi \\ z = \cos u\,. \end{cases}$$

ha come sostegno una sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, con centro nell'origine, privata di un meridiano.

Esempio 3. Si consideri il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Equazioni parametriche per questa superficie sono, per esempio,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Esempio 4. Le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \,, \quad u^2 + v^2 < 1 \end{cases}$$

rappresentano la parte del grafico di $z = x^2 + y^2$ che giace sopra il cerchio (del piano xy) $x^2 + y^2 < 1$.

Più in generale, se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D, allora l'applicazione da D in $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \tag{1}$$

è una superficie semplice, il cui sostegno coincide con il grafico di f. Una superficie di questo tipo, o del tipo

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ g(u, v) \\ v \end{pmatrix}$$

o

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} h(u, v) \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

con g e h funzioni in $\mathcal{C}^1(D)$, viene detta *cartesiana*.

Ricordiamo inoltre che una delle nozioni più significative nella teoria delle curve è quella di curva regolare. Nel caso delle curve, il concetto di regolarità garantiva l'esistenza del vettore tangente in ogni punto. L'estensione di questa nozione al caso delle superfici non è immediata; riusciremo comunque a definire anche in questo caso una nozione di regolarità, in grado di garantire l'esistenza del piano tangente in ogni punto.

Definizione 2. *Una superficie σ si dice regolare se $\sigma \in \mathcal{C}^1(D)$ e se i due vettori*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \ \ e \ \ \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

sono linearmente indipendenti (in particolare, entrambi sono non nulli) in ogni punto $(u, v) \in D$.

Il fatto che i due vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ siano linearmente indipendenti si può esprimere in diversi modi: una possibilità è per esempio richiedere che la matrice jacobiana

$$J_{(u,v)}\sigma := \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{2}$$

abbia rango uguale a 2 in ogni punto $(u, v) \in D$.

Osserviamo anche che, indicati con $A(u,v)$, $B(u,v)$ e $C(u,v)$ i minori di ordine due della matrice jacobiana (2), vale a dire

$$A(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_2,\sigma_3)}{\partial(u,v)}\,, \quad B(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_3,\sigma_1)}{\partial(u,v)}\,, \quad C(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_1,\sigma_2)}{\partial(u,v)}\,,$$

la condizione di indipendenza lineare è equivalente a richiedere che per ogni coppia $(u,v) \in D$ il vettore $(A(u,v), B(u,v), C(u,v))$ non si annulli, cioè che

$$A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v) > 0\,.$$

Da un punto di vista formale, può essere utile scrivere questa condizione utilizzando la nozione di prodotto esterno. Ricordiamo che se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, si definisce *prodotto esterno* o *prodotto vettoriale* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ il vettore

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\,.$$

Allora la condizione che i due vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ siano linearmente indipendenti si può scrivere più brevemente nella forma

(3)
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \neq 0 \;\; \forall (u,v) \in D\,.$$

IL vettore $\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}$ svolge un ruolo particolare nella teoria delle superfici. Infatti, se $(\bar u, \bar v) \in D$, il vettore

(4)
$$N(\bar u,\bar v) := \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\bar u,\bar v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\bar u,\bar v)$$

viene detto *vettore normale* alla superficie in $\bar P = \sigma(\bar u,\bar v)$. Si osservi che

$$N(\bar u,\bar v) = \big(A(\bar u,\bar v), B(\bar u,\bar v), C(\bar u,\bar v)\big)$$

e che

$$\|N(\bar u,\bar v)\|^2 = A^2(\bar u,\bar v) + B^2(\bar u,\bar v) + C^2(\bar u,\bar v)\,.$$

Il versore

$$n(\bar u,\bar v) = \frac{N(\bar u,\bar v)}{\|N(\bar u,\bar v)\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{A^2(\bar u,\bar v) + B^2(\bar u,\bar v) + C^2(\bar u,\bar v)}}\big(A(\bar u,\bar v), B(\bar u,\bar v), C(\bar u,\bar v)\big)\Big)$$

viene detto *versore normale* alla superficie in $\bar P = \sigma(\bar u,\bar v)$.

Esempio 5. Se f è di classe $\mathcal{C}^1$, ogni superficie cartesiana nella forma (1) è regolare. È facile verificare, infatti, che

$$J_{(u,v)}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto (u,v) di D. Risulta inoltre

$$n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\big(-f_u, -f_v, 1\big)\,.$$

Si può dimostrare che se σ rappresenta una superficie regolare con sostegno Σ e $\bar{P} = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u}, \bar{v}) \in D$, allora esiste un unico piano tangente alla superficie (o meglio, al suo sostegno) in $\bar{P}$. Esso risulta essere ortogonale al versore normale e ha quindi equazione

$$A(\bar{u}, \bar{v})(x - \bar{x}) + B(\bar{u}, \bar{v})(y - \bar{y}) + C(\bar{u}, \bar{v})(z - \bar{z}) = 0\,,$$

ove $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono le coordinate di $\bar{P} = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$.

Infine, si dice che ogni parametrizzazione del sostegno Σ di una superficie semplice e regolare σ individua su di esso un *verso di attraversamento* o *orientamento*. Ogni sostegno di superficie semplice e regolare ha quindi due orientamenti possibili. Il fatto di scegliere l'uno o l'altro fra questi due orientamenti è puramente convenzionale.

Esempio 6. Se σ è una superficie cartesiana della forma (1), risulta allora

$$N(u, v) = \big(- f_u(u, v), -f_v(u, v), 1 \big)\,,$$

così che la componente lungo l'asse z del vettore normale è positiva. Per convenzione, si dice che l'orientamento del grafico di una funzione $z = f(x, y)$ (che, come abbiamo visto, coincide con il sostegno di Σ) è nel verso delle z positive.

2. Integrali di superficie

Sia $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie semplice e regolare.

Definizione 3. Si dice *calotta di* σ la restrizione di σ a un qualsiasi compatto K misurabile contenuto in D.

Con abuso di linguaggio, parleremo talvolta di "area di una calotta", anzichè di area del sostegno di una calotta.

Definizione 4. Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare.[1] Sia Σ_K il sostegno della calotta. Si definisce l'area $\mathcal{A}_\sigma$ della calotta come

$$\mathcal{A}_\sigma := \int_K \|N(u, v)\|\, du\, dv\,.$$

Si può dimostrare che l'area di una calotta regolare non dipende dalla particolare parametrizzazione adottata, nè dall'orientamento scelto.

Esempio 7 (area di un grafico).
Se σ è una superficie cartesiana della forma (1), cioè

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

con $f : D \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D e K è un compatto misurabile contenuto in D, ricordando che

$$N(u, v) = \big(- f_u(u, v), -f_v(u, v), 1 \big)\,,$$

si ha immediatamente che

$$\mathcal{A}_\sigma := \int_K \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, du\, dv\,.$$

[1]Questo significa che si considera la restrizione a K di una superficie regolare definita su un aperto connesso D, contenente K.

Ci limitiamo nel seguito a dare la definizione di integrale di una una funzione continua sul sostegno di una calotta regolare, omettendo le dimostrazioni.
Definizione 5. Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare con sostegno Σ_K. Sia f una funzione continua e limitata su Σ_K. Si definisce integrale superficiale di f sulla calotta σ il numero

$$\int_\sigma f := \int_K f(\sigma(u,v))\,\|N(u,v)\|\,du\,dv\,.$$

Si osservi che nel caso $f \equiv 1$ si ritrova ovviamente la definizione di area della calotta σ.

Gli integrali di superficie intervengono nel calcolo di masse, baricentri, momenti di inerzia e di altre grandezze fisiche associare a corpi laminari. Essi sono anche alla base della nozione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.