MATEMATICA A, Esercizi di autovalutazione, 8
(giustificare le risposte)

Vicenza, novembre 2007.

Esercizi sulle equazioni differenziali

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\alpha y''(t) + 2y'(t) + \frac{\alpha}{2} y(t) = 0.$$

i) Determinare l'integrale generale per ogni valore del parametro $\alpha \geq 0$. Dire per quali valori dei parametri le soluzioni sono tutte: i) periodiche; ii) limitate in $[0, +\infty[$. iii) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \geq 0$ per cui esiste almeno una soluzione dell'equazione differenziale tale che $e^{\frac{t}{\sqrt{3}}} y(t)$ risulta illimitata in $[0, +\infty[$.

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{2\,y(t)}{\sin(2t)} = \sin t + \cos t.$$

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 2ty(t) = te^{-t^2}.$$

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) = t + \sin t.$$

5. Determinare i valori del parametro reale α per i quali l'equazione differenziale

$$y'''(t) - \alpha y'(t) = \sin t$$

ammette almeno una soluzione y tale che $\lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

6. Per quali valori del parametro $\lambda > 0$ la soluzione $y(t)$ di

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

verifica la condizione $y(\pi) = 0$? Fra queste soluzioni ne esiste una strettamente positiva in $]0, \pi[$?

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin t \\ \\ y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta \end{cases}$$

i) Trovare una soluzione nel caso $\alpha = \beta = 0$. ii) Dire se esistono α, β reali tali da rendere la soluzione periodica.

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{\frac{1+y(t)}{1+t^2}} \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

9. Determinare i valori del parametro reale α per i quali l'equazione differenziale

$$2y''(t) + y'(t) + \frac{\alpha}{2} y(t) = te^{-t}$$

ammette almeno una soluzione $y(t)$ tale che $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

Raccolta di esercizi da appelli

1 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) - \alpha y(x) = \cos x - e^{x/2} \sin x.$$

(a) Determinare l' integrale generale dell'equazione differenziale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (Non si richiede di calcolare esplicitamente le costanti delle soluzioni particolari).

(b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste una soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale tale che la funzione $e^{-x/2} y(x)$ sia illimitata in $[0, +\infty[$.

2 Determinare l'integrale generale dell' equazione differenziale

$$y'''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y''(x) = x.$$

3 *(a)* Risolvere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2ay'(x) + 4y(x) = e^{2x}.$$

(b) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$$

per ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione data.

4 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\alpha y'' - 3y = xe^x.$$

(a) Determinare la soluzione per ogni valore di α.

(b) Dire per quali valori del parametro α esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{xe^x} \in \mathbb{R}.$$