Eq. diff. del primo ordine

- lineari
- variabili separabili

eq. riconducibili al primo ordine

$$\to\ y'' + y' = \operatorname{sen} x \qquad y = y(x)$$

eq. del 2° ordine

$$y' = z(x) \qquad y'' = z'$$

$$z' + z = \operatorname{sen} x \qquad \boxed{z' = \underbrace{-1}_{a(x)}\, z + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{b(x)}}$$

..

eq del 1° ordine lineare $\Rightarrow z(x) = \ldots$

$y' = z(x)$ $\qquad\qquad$ $y(x) = \int z(x) + C$

Equazioni del <u>secondo ordine</u> in <u>forma normale</u>

$$y'' = g(x, y, y'), \qquad x \in (a, b)$$

$$\boxed{y(x)}$$

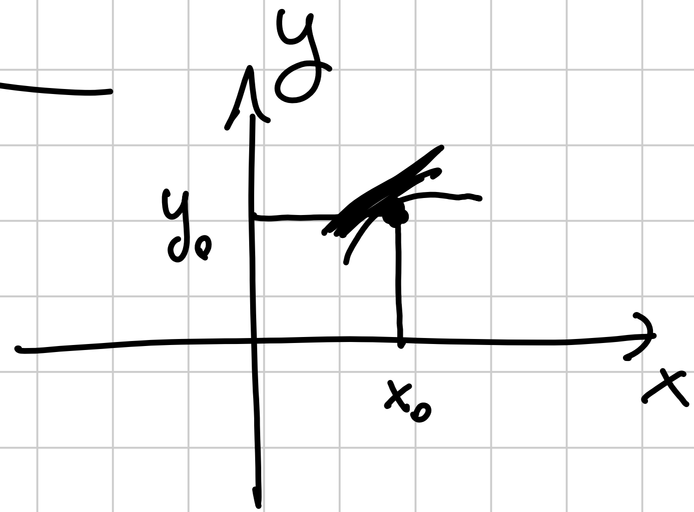
<u>es.</u> $y'' = \operatorname{sen}(e^x y + y')$

$y'' = e^x y' + 3xy + \operatorname{sen} x$

↳ lineare

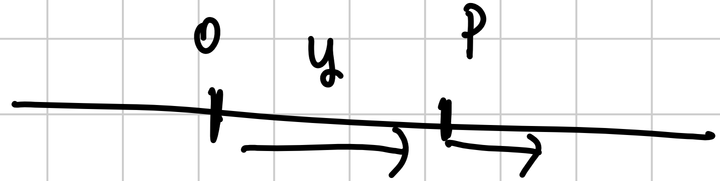
Pb. di <u>Cauchy</u>

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$



Dinamica del punto su una retta

$F = m a$



$$m\,\ddot{y}(t) = -k\,y + a\,\dot{y} + g$$

lineare

?

Eq. lineari del secondo ordine.

$$\boxed{y'' = b\,y' + c\,y + d}\,, \qquad \left.\begin{matrix} b(x) \\ c(x) \\ d(x) \end{matrix}\right\} \in C^0(I)$$

$$y'' = \underbrace{e^x}_{b(x)}\, y' + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{c(x)}\, y + \underbrace{x}_{d(x)}$$

Struttura della soluzione generale

$$y(x) = y_0 + \tilde{y}$$

soluzione eq. omogenea associata

soluzione particolare dell'eq. completa.

1° passo eq. omogenea associata

$$y'' = b(x)\,y' + c(x)\,y \qquad \textcircled{0}$$

Def. Due soluzione y_1, y_2 di $\textcircled{0}$ si dicono linearmente indipendenti se

$$\alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Se y_1 e y_2 sono <u>linearmente dipendenti</u>

se $\exists\ \alpha, \beta \neq 0$ t.c. $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \quad \forall x$

$$y_1 = -\frac{\beta}{\alpha} y_2 = C y_2$$

<u>es.</u>

$y_1 = \cos x$ $\qquad \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x = 0 \quad \forall x$

$y_2 = \operatorname{sen} x$ $\qquad \Updownarrow$

$\alpha = \beta = 0$

$y_3 = -\operatorname{sen} x$ $\qquad y_2$ e y_3 sono lin. <u>dipendenti</u>

__es.__ $y_1 = e^{x}$ $\qquad y_2 = e^{3x}$ $\qquad$ l. indip.

$y_3 = 5e^{x}$ $\qquad y_1, y_3$ lin dip.

__Teo.__ Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni __lin. indipendenti__ dell'eq. lineare __omogenea__ allora __tutte__ le soluzioni di tale equazione sono del tipo $y(x) = \alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x)$, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Devo quindi trovare due soluzioni lin. indipendenti.
Facciamolo nel caso dei coefficienti costanti.

Eq. lineari del 2º ordine omogenee a coefficienti costanti.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

moto armonico $\leftarrow$ $m y'' + k y = 0$, moto armonico smorzato $\leftarrow$ $my'' + \lambda y' + ky = 0$

Cerco le soluzione

$y(x) = e^{\lambda x}$ con λ da determinare

$y' = \lambda e^{\lambda x}$ $\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0 \quad \forall x$

$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$

$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$ eq. di 2° grado in λ

eq. caratteristica associata

$$a y'' + b y' + c y = 0 \qquad y(x) = e^{\lambda x}$$

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

1 caso $\quad \Delta = b^2 - 4ac > 0$

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad / \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

y_1 e y_2 sono lin. indip. $\Rightarrow y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$

tutte le soluzioni

es. $y'' - y = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad e^{x} = y_1$

$\lambda_2 = -1 \qquad e^{-x} = y_2$

$$y(x) = \underline{\alpha e^{x} + \beta e^{-x}}$$

problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$$

$$y(0) = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$$

$$y(x) = \alpha e^{x} - \alpha e^{-x}$$

$$y'(x) = \alpha e^{x} + \alpha e^{-x}$$

$$y'(0) = \alpha + \alpha = 2\alpha = 1$$

$\alpha = 1/2$

$\beta = -1/2$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)}$$

2° caso $\Delta = 0$

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

$$y_2 = x e^{\lambda x}$$

sono l. indip.

$$\boxed{y(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta x e^{\lambda x}}$$

es. $y'' - 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1 \qquad y(x) = \alpha e^{x} + \beta x e^{x}$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

<u>fare</u> det α, β.

3° caso

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$\Delta < 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \mu \pm i\omega$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} =$$

$$= \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\mu} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}_{\omega} \qquad \begin{cases} y_1 = e^{\mu x} \cos \omega x \\ y_2 = e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x \end{cases}$$

sono lin. indip.

$$e^{\mu + i\omega} = e^{\mu}(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$$

$$y(x) = e^{\mu x}(\alpha \cos \omega x + \beta \operatorname{sen} \omega x)$$

Es. $y'' + y = 0$ eq. moto armonico

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\lambda = \pm i$

$\lambda = \mu \pm i\omega$

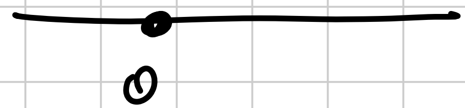
$\mu = 0$

$\omega = 1$

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x$$

Pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$



$y(0) = \alpha = 0$

$y'(x) = \beta \cos x$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = \beta \operatorname{sen} x$

$y'(0) = \beta = 1$

$y(x) = \operatorname{sen} x$

$y'(0) = \beta = 0$

$y(x) \equiv 0$

Es.

$$y'' + 2y' + 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \qquad \Delta < 0$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = \underbrace{-1}_{\mu} \pm \underbrace{2}_{\omega} i$$

$$y(x) = e^{-x}\left(\alpha \cos 2x + \beta \operatorname{sen} 2x\right)$$

<u>Es.</u> $\begin{cases} y'' + 2y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+1}$

$= -1 \pm \sqrt{2}$

$\Delta > 0$

$$y(x) = \alpha e^{(-1+\sqrt{2})x} + \beta e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

$$y(0) = \alpha + \beta = 0 \qquad \beta = -\alpha$$

$$y(x) = \alpha\left(e^{(-1+\sqrt{2})x} - e^{(-1-\sqrt{2})x}\right)$$

$$y'(x) = \alpha\left((\sqrt{2}-1)e^{(\sqrt{2}-1)x} + (1+\sqrt{2})e^{(-1-\sqrt{2}x)}\right)$$

$$y'(0) = \alpha\left(\sqrt{2} - \cancel{1} + \cancel{1} + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha\, \cancel{2\sqrt{2}} = \cancel{2\sqrt{2}} \qquad \alpha = 1$$

$$y(x) = e^{(-1+\sqrt{2})x} - e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

<u>OSS.</u> A proposito di esistenza e unicità del pb di <u>Cauchy</u>

Teo. 1° ordine $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$f(x,y)$

se f_y è limitata $\Rightarrow$ $f(x,y)$ è localm. lipschitziana

es. eq. lineare del primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x) = f(x,y)$$

$f_y = a(x)$ continua in I chiuso e limitato

è limitata

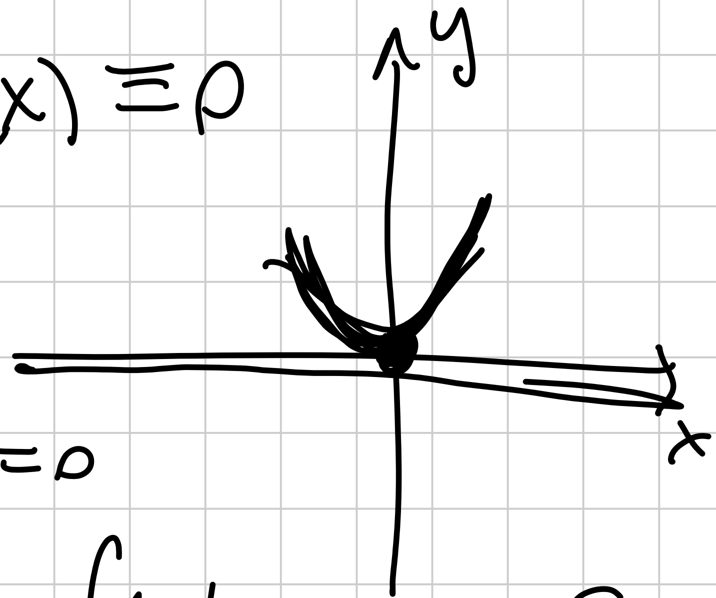
Valgono ipotesi del teo. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\exists!$ soluzione

es.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y(x) \equiv 0$$



Cerco $y(x) \neq 0$, vicino a $x=0$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1 \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 1\,dx = x + C$$

$$2\sqrt{y} = x + C$$

$$0 = 0 + C$$

$C=0$

$$2\sqrt{y} = x \qquad \sqrt{y} = \frac{x}{2} \qquad y = \frac{x^2}{4}$$

(è un'altra soluzione del pb di Cauchy

in questo caso la soluzione non è unica !

non valgono le ipotesi del teorema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

non è limitata vicino a $y=0$