Correzione

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Eq. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Struttura della soluzione generale:

$$y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{soluzione eq. omogenea associata}} + \underbrace{\tilde{y}(x)}_{\text{una soluzione particolare}}$$

$y_0(x) \longleftrightarrow$ ieri

$y_0(x) = \alpha y_1 + \beta y_2$
doppie infinità
di soluzioni

$\tilde{y}(x) = ?$

$a y'' + b y' + c y = g(x)$ $\quad \bar{E}$

Troveremo $\tilde{y}(x)$ soluzione particolare di $\bar{E}$

quando

1) $g(x)$ polinomio
2) $g(x)$ esponenziale
3) $g(x)$ $\cos x$ o $\sin x$

$\Downarrow$

4) somme di funzioni di sopra

$\boxed{1 \text{ caso}}$ $g(x)$ polinomio di grado n

$\tilde{y}(x)$ la cerco come un <u>polinomio</u> di grado $\underline{\underline{n}}$ se $c \neq 0$, altrimenti di grado $n+1$

<u>es.</u> $y'' - y = \underbrace{1 + x^2}_{g(x)}$!

polinomio di grado 2

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$$

y_0 : $\quad y'' - y = 0 \qquad \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$

$$y_0(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$$

la cerco di questo tipo:

$$\tilde{y}(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \forall x$$

impongo $\quad \tilde{y}'' - \tilde{y} = 1 + x^2$

$$\tilde{y}'(x) = 2 a_2 x + a_1 \qquad \tilde{y}'' = 2 a_2$$

$$2a_2 - (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 1 + x^2$$

$$-a_2 x^2 - a_1 x + (2a_2 - a_0) = 1 + x^2$$

si uguagliano i coeff. $\forall x$

$$-a_2 = 1$$

$$-a_1 = 0 \implies a_2 = -1$$

$$2a_2 - a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$a_0 = 2a_2 - 1 = -3$$

$$\tilde{y}(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\tilde{y}(x) = -x^2 - 3$$

soluzione particolare dell'eq.

$$\boxed{y(x) = \underbrace{\alpha e^{x} + \beta e^{-x}}_{y_0} \underbrace{- x^2 - 3}_{\tilde{y}}}$$

tutte le soluzioni di

$$y'' - y = 1 + x^2$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 1 + x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(0) = \alpha + \beta - 3 = 0 \qquad \beta = 3 - \alpha$$

$$y'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x} - 2x$$

$$y'(0) = \alpha - \beta = 1 \qquad \beta = \alpha - 1$$

$$3 - \alpha = \alpha - 1 \implies 2\alpha = 4 \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 1$$

$$y(x) = 2e^{x} + e^{-x} - x^{2} - 3$$

soluzione del pb. di Cauchy

es. $y'' + 2y' = \underbrace{x + 1}$ polinomio di grado 1

$c = 0$ cerco $\tilde{y}$ come polinomio di grado 2.

$\tilde{y}(x) = a_2 x^2 + a_1 \underline{x + a_0}$

$\tilde{y}'(x) = 2a_2 x + a_1$

$\tilde{y}''(x) = 2a_2$

provare a cercarla come

$\tilde{y} = a_1 x + a_0$

$$2a_2 + 2(2a_2 x + a_1) = x + 1$$

$$4a_2 x + 2a_2 + 2a_1 = 1x + 1$$

$4a_2 = 1$ $\qquad a_2 = 1/4$

$2a_2 + 2a_1 = 1$ $\qquad a_1 = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x + a_0$ $\qquad a_0$ qualsiasi

$a_0 = 0$

$\tilde{y} = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x$ $\qquad$ soluz. particolare

y_0 $\quad y'' + 2y' = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda+2) = 0$

$\lambda = 0 \; , \; \lambda = -2$

$y_0(x) = \alpha + \beta e^{-2x}$

$\sim \cdot \sim$

se $\quad y'' = g(x) \qquad y'(x) = \int g(x) = G(x) + C$

$y(x) = \int G(x)\,dx + Cx$

es// $y'' = x + 1$ $\qquad y' = \frac{x^2}{2} + x + C$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Cx + \bar{C}$$

② $g(x) = e^{\gamma x}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

es. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{2x}$

soluz. particolare

$\tilde{y}(x) = A e^{2x}$ con A da determinare

$\tilde{y}(x) = A e^{\gamma x}$ se γ <u>non</u> è soluzione dell'eq. caratteristica associata

se γ <u>è</u> soluzione dell'eq caratteristica

$\tilde{y}(x) = A x e^{\gamma x}$ se γ è soluzione semplice

$= A x^2 e^{\gamma x}$ se γ è soluzione doppia es. $y'' - 2y' - 3y = 8\underline{\underline{e}}^{2x}$

eq. omogenea $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$y_0(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x}$$

$$\tilde{y}(x) = A e^{2x}$$

e determino A imponendo che $\tilde{y}$ sia soluzione

$$\tilde{y}' = 2Ae^{2x} \qquad \tilde{y}'' = 4Ae^{2x}$$

$$4A\cancel{e^{2x}} - 2(2A\cancel{e^{2x}}) - 3A\cancel{e^{2x}} = 8\cancel{e^{2x}}$$

$$-3A = 8 \qquad A = -8/3$$

$$\tilde{y} = -\frac{8}{3}e^{2x}$$

$$y(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{8}{3}e^{2x}$$

ex. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$

$y_0(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x}$

$\tilde{y}(x) = A\, x e^{3x}$

$\tilde{y}' = Ae^{3x} + 3Ax\, e^{3x}$

$\tilde{y}'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$

$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 2(Ae^{3x} + 3Axe^{3x}) -$

$$-3Axe^{3x} = 8e^{3x}$$

$$6A + \cancel{9A}x - 2A - \cancel{6A}x - \cancel{3A}x = 8$$

$$4A = 8 \qquad A = 2$$

$$\tilde{y}(x) = 2xe^{3x}$$

$$y(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} + 2xe^{3x}$$

es. $y'' - 4y = e^{2x}$ $\Longrightarrow$ fare

$y'' - 4y = 0$ $\lambda^2 - 4 = 0$

es. $y'' - 6y' + 9 = e^{3x}$

$y'' - 6y' + 9 = 0$ $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda = 3$

$y_0(x) = \alpha e^{3x} + \beta x e^{3x}$

$$\tilde{y}(x) = A\,x^2 e^{3x}$$

con A da determinare imponendo che $\tilde{y}$ sia soluzione

$\Big\downarrow$ fare

3 caso

$$g(x) = e^{\gamma x} \cos \omega x$$

oppure

$$= e^{\gamma x} \operatorname{sen} \omega x$$

$$\tilde{y}(x) = e^{\gamma x}\left(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x\right)$$

se $\gamma + i\omega$ <u>non</u> è radice dell'eq. caratteristica associata

altrimenti

$$\tilde{y}(x) = x\, e^{\gamma x}\left(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x\right)$$

Es. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$

$g(x) =$

$y'' - 2y' - 3y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\gamma = 0$

$\omega = 2$

$y_0(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x}$

$2i$ non è soluzione dell'eq. caratt.

$$\boxed{\tilde{y}(x) = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x}$$

$e^{\gamma x} = 1 \quad \gamma = 0$

A e B da determinare imponendo che $\tilde{y}$ sia soluzione

$$\tilde{y}' = 2A\cos 2x - 2B\,\mathrm{sen}\,2x$$

$$\tilde{y}'' = -4A\,\mathrm{sen}\,2x - 4B\cos 2x$$

$$-4A\,\mathrm{sen}\,2x - 4B\cos 2x - 2\left(2A\cos 2x - 2B\,\mathrm{sen}\,2x\right)$$

$$-3\left(A\,\mathrm{sen}\,2x + B\cos 2x\right) = \cos 2x$$

$$(\mathrm{sen}\,2x)\left(-4A + 4B - 3A\right) + \cos 2x\left(-4B - 4A\right.$$

$$\left.-3B\right) = \cos 2X$$

$$-7A + 4B = 0 \qquad B = \frac{7}{4}A$$

$$-7B - 4A = 1 \qquad -\frac{49}{4}A - 4A = 1$$

$A = \dots \quad , \quad B = \dots .$

$$\tilde{y}(x) = A \sin 2x + B \cos 2x$$

Quindi

$$y(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} + A \sin 2x + B \cos 2x$$

es.
$$y'' + y = \cos x$$

$$y'' + y = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x$$

$$\tilde{y}(x) = x\left(A \cos x + B \operatorname{sen} x\right) \qquad A, B \text{ determinare}$$

$$\tilde{y}' = A \cos x + B \operatorname{sen} x - A x \operatorname{sen} x + B x \cos x$$

$$\tilde{y}'' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x - A \operatorname{sen} x - A x \cos x + B \cos x$$
$$- B x \operatorname{sen} x$$

$$-2A\,\text{sen}\,x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} - \cancel{Bx\,\text{sen}\,x}$$

$$+ \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\,\text{sen}\,x} = \cos x$$

$$\left.\begin{array}{l} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1/2 \end{array}\right.$$

$$y'' + y = \cos x$$

$$\tilde{y}(x) = x\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x\right)$$

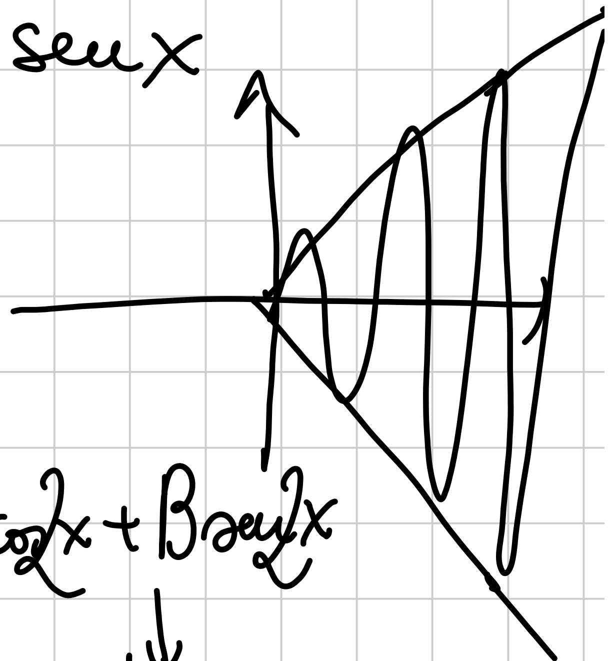
$$\boxed{y(x) = \alpha\cos x + \beta\,\text{sen}\,x + \frac{x\,\text{sen}\,x}{2}}$$

RISONANZA!

<u>oss.</u>

$$y'' + y = \cos x$$

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x + \frac{x}{2} \operatorname{sen} x$$



$$y'' + y = \cos 2x$$

...

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x + A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$$

da determinare

$$y'' + y = \cos((1+\varepsilon)x)$$

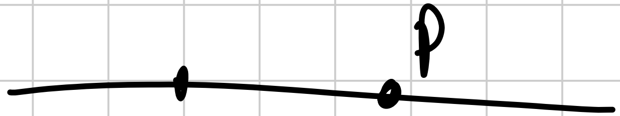
le soluzioni nel caso $g(x) = \cos x$

sono illimitate se $g(x) = \cos \omega x$

$\omega \neq 1$

le soluzioni sono sempre limitate.

$$y'' + y = \cos \omega \cdot x$$



soggetto ad una forza elastica e ad forza di tip periodico.

se $\omega = 1$

RISONANZA

rende illimitate le soluzioni

se $\omega = 1$ le oscillazioni del sistema diventano illimitate.