Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11 (Canale 2)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica

Paola Mannucci

Appunti sulle superfici

1. Superfici regolari

Introduciamo il concetto di superficie parametrica regolare.

Definizione 1. Sia D un sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera sia una curva di Jordan. Diciamo **parametrizzazione di una superficie regolare** in $\mathbb{R}^3$ una funzione

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$$

che sia C^1 in D e C^0 in $\overline{D}$, sia iniettiva e tale che matrice jacobiana

$$J_\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{1}$$

abbia rango uguale a 2 in ogni punto $(u,v) \in D$.

L'insieme immagine di σ

$$\Sigma := \sigma(D) = \{\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in D\}$$

viene detto *superficie regolare.*

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* della superficie, mentre u e v sono i *parametri* di σ.

Esempio 1. I piani nello spazio sono esempi di superfici.
Esempio 2. La superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v\,, & 0 \le u \le \pi \\ y = \sin u \sin v\,, & 0 \le v \le 2\pi \\ z = \cos u\,. \end{cases}$$

é la superficie sferica di raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, con centro nell'origine.
Esempio 3. Si consideri il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Equazioni parametriche per questa superficie sono, per esempio,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Esempio 4. Le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \,, \quad u^2 + v^2 \leq 1 \end{cases}$$

rappresentano la parte del grafico di $z = x^2 + y^2$ che giace sopra il cerchio (del piano xy) $x^2 + y^2 \leq 1$.

Più in generale, se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D, allora l'applicazione da D in $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \tag{2}$$

è una parametrizzazione di una superficie regolare che coincide con il grafico di f. Una superficie di questo tipo, o del tipo

$$\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ g(u,v) \\ v \end{pmatrix}$$

o

$$\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} h(u,v) \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

con g e h funzioni in $\mathcal{C}^1(D)$, viene detta *cartesiana*.

Nel caso delle curve, il concetto di curva regolare garantiva l'esistenza del vettore tangente in ogni punto. La regolarità delle superfici ci garantisce l'esistenza del piano tangente in ogni punto.

Il fatto che la matrice jacobiana abbia rango 2 ci dice che i due vettori

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \;\; e \;\; \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

sono linearmente indipendenti (in particolare, entrambi sono non nulli) in ogni punto $(u,v) \in D$.

Osserviamo anche che, indicati con $A(u,v)$, $B(u,v)$ e $C(u,v)$ i minori di ordine due della matrice jacobiana (1), vale a dire

$$A(u,v) = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \,, \quad B(u,v) = \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \,, \quad C(u,v) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \,,$$

la condizione di indipendenza lineare è equivalente a richiedere che per ogni coppia $(u,v) \in D$ il vettore $\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) = (A(u,v), B(u,v), C(u,v))$ non si annulli, cioè che

$$\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|^2 = A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v) > 0 \,.$$

Da un punto di vista formale, può essere utile scrivere questa condizione utilizzando la nozione di prodotto vettoriale. Ricordiamo che se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, si definisce *prodotto vettoriale* (o esterno) di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ il vettore

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Allora la condizione che i due vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ siano linearmente indipendenti si può scrivere più brevemente nella forma

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D\,. \tag{3}$$

Il vettore $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ svolge un ruolo particolare nella teoria delle superfici. Infatti, se $(\bar{u},\bar{v}) \in D$, il vettore

$$N(\bar{u},\bar{v}) := \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\bar{u},\bar{v}) \tag{4}$$

viene detto *vettore normale* alla superficie in $\bar{P} = \sigma(\bar{u},\bar{v})$. Si osservi che

$$N(\bar{u},\bar{v}) = \big(A(\bar{u},\bar{v}), B(\bar{u},\bar{v}), C(\bar{u},\bar{v})\big)$$

e che

$$\|N(\bar{u},\bar{v})\|^2 = A^2(\bar{u},\bar{v}) + B^2(\bar{u},\bar{v}) + C^2(\bar{u},\bar{v})\,.$$

Il versore

$$n(\bar{u},\bar{v}) = \frac{N(\bar{u},\bar{v})}{\|N(\bar{u},\bar{v})\|} = \frac{1}{\sqrt{A^2(\bar{u},\bar{v}) + B^2(\bar{u},\bar{v}) + C^2(\bar{u},\bar{v})}}\big(A(\bar{u},\bar{v}), B(\bar{u},\bar{v}), C(\bar{u},\bar{v})\big)$$

viene detto *versore normale* alla superficie in $\bar{P} = \sigma(\bar{u},\bar{v})$.

Esempio 5. Se f è di classe $\mathcal{C}^1$, ogni superficie cartesiana nella forma (2) è regolare. È facile verificare, infatti, che

$$J_{(u,v)}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 in ogni punto (u,v) di D. Risulta inoltre

$$n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\big(- f_u, -f_v, 1\big)\,.$$

Si può dimostrare che se σ rappresenta una parametrizzazione di una superficie regolare Σ e $\bar{P} = \sigma(\bar{u},\bar{v})$, $(\bar{u},\bar{v}) \in D$, allora esiste un unico piano tangente alla superficie in $\bar{P}$. Esso risulta essere ortogonale al versore normale e ha quindi equazione

$$A(\bar{u},\bar{v})(x - \bar{x}) + B(\bar{u},\bar{v})(y - \bar{y}) + C(\bar{u},\bar{v})(z - \bar{z}) = 0\,,$$

ove $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ sono le coordinate di $\bar{P} = \sigma(\bar{u},\bar{v})$.

Infine, si dice che ogni parametrizzazione σ di una superficie regolare individua su di esso un *verso di attraversamento* o *orientamento*. Ogni superficie regolare ha quindi due orientamenti possibili. Il fatto di scegliere l'uno o l'altro fra questi due orientamenti è puramente convenzionale.

Esempio 6. Se σ è una superficie cartesiana della forma (2), risulta allora

$$N(u,v) = \big(- f_u(u,v), -f_v(u,v), 1 \big) \,,$$

così che la componente lungo l'asse z del vettore normale è positiva. Per convenzione, si dice che l'orientamento del grafico di una funzione $z = f(x,y)$ (che, come abbiamo visto, coincide con il sostegno di Σ) è nel verso delle z positive.

2. Integrali di superficie

Definizione 2. Sia $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare. Sia Σ la superficie regolare. Si definisce l'area $\mathcal{A}(\Sigma)$ della superficie come

$$\mathcal{A}(\Sigma) := \int_D \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| \, du \, dv \,.$$

Si può dimostrare che l'area di una superficie regolare non dipende dalla particolare parametrizzazione adottata, ne' dall'orientamento scelto.

Esempio 7 (area di un grafico).
Se Σ è una superficie cartesiana della forma (2), cioè

$$\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

con $f : D \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D, ricordando che

$$\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) = \big(- f_u(u,v), -f_v(u,v), 1 \big) \,,$$

si ha immediatamente che

$$\mathcal{A}(\Sigma) := \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv \,.$$

Ci limitiamo nel seguito a dare la definizione di integrale di una una funzione continua sul sostegno di una superficie regolare, omettendo le dimostrazioni.

Definizione 3. Sia $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare Σ. Sia f una funzione continua e limitata su Σ. Si definisce integrale superficiale di f su Σ il numero

$$\int_\Sigma f := \int_D f(\sigma(u,v)) \, \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| \, du \, dv \,.$$

Si osservi che nel caso $f \equiv 1$ si ritrova ovviamente la definizione di area della superficie Σ.

Gli integrali di superficie intervengono nel calcolo di masse, baricentri, momenti di inerzia e di altre grandezze fisiche associate a corpi laminari. Essi sono anche alla base della nozione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.