Funzioni in più variabili

Corso di Analisi 1

di Andrea Centomo

7 gennaio 2010

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z} \ni n \geq 1$, l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (non vuoto) una funzione a valori scalari $f\colon X \to \mathbb{R}$ è una legge che ad ogni elemento $\boldsymbol{x} \in X$ associa uno e un solo elemento $y = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Vediamo un paio di esempi molto importanti. Le funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloide ellittico)

b) $g(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide iperbolico)

ed hanno i grafici di Figura 1. Le linee rosse sono ottenute intersecando i paraboloidi con piani del tipo $y = c$ e $x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Ad esempio, se prendiamo il paraboloide ellittico è facile vedere che posto $y = c$ si ottiene $z = f(c, x) = c^2 + x^2$ che ha per grafico una parabola.

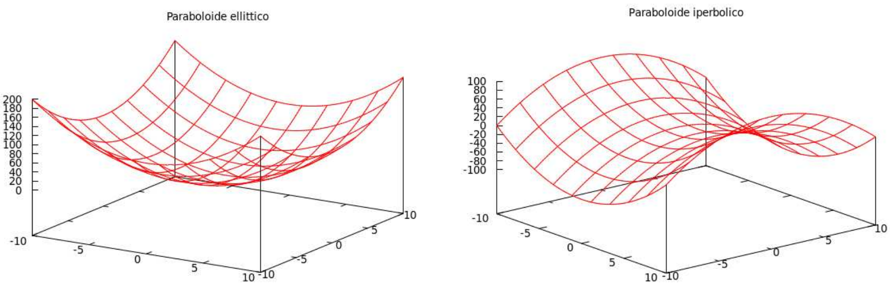

Figura 1. Paraboloidi ottenuti con Gnuplot

In quanto segue vogliamo estendere le nozioni di limite e continuità a questo genere di funzioni.

1 Concetti base

In $\mathbb{R}^n$ è definita in modo naturale l'operazione di *addizione* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

L'addizione gode delle stesse proprietà viste per l'addizione di numeri reali:

a) associativa: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

b) elemento neutro: esiste $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

c) opposto: per ogni $\boldsymbol{x}$ esiste $-\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

d) commutativa: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

dove $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$. In $\mathbb{R}^n$ è definita anche l'operazione di *moltiplicazione per uno scalare* $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n).$$

La moltiplicazione per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

a) distributiva sugli scalari: $(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}+\mu\cdot\boldsymbol{x}$

b) distributiva: $\lambda\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\cdot\boldsymbol{x}+\lambda\cdot\boldsymbol{y}$

c) $\lambda(\mu\cdot\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{x}$

d) $0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

e) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

L'insieme $\mathbb{R}^n$ con le operazioni definite sopra è un esempio di **spazio vettoriale**. Gli elementi dello spazio vettoriale prendono il nome di *vettori*.

Nota 1. Osserviamo che $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale e non $\mathbb{R}^n$. In altri termini una n-upla di numeri reali è un vettore solo **dopo** che sono state definite le operazioni di addizione e di prodotto per uno scalare.

Nota 2. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, con $n\geq 2$, **non** è ordinato.

Nello spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ è definito il *prodotto scalare* $\langle\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tra due vettori

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

con le proprietà

1. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geq 0$ e l'uguaglianza si ha se e solo se $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$
2. $\langle\lambda\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\lambda\,\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$, con $\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$
4. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$.

Il prodotto scalare, tra le altre cose, permette di definire l'ortogonalità tra vettori.

Definizione 3. *Siano* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^n$*, allora essi sono ortogonali se* $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=0$.

Il prodotto scalare induce su $\mathbb{R}^n$ una *norma* ossia una funzione $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definita da

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

La norma gode di proprietà analoghe a quelle del valore assoluto in $\mathbb{R}$

1. $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$
2. $\|\lambda\cdot\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ con $\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (disuguaglianza triangolare)

Inoltre vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leq\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$

Prodotto scalare e norma permettono di definire (a meno di inversione del coseno) l'angolo φ compreso tra due vettori non nulli

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\varphi = \frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}.$$

La norma induce una *metrica* su $\mathbb{R}^n$ ossia la funzione $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

La metrica gode di proprietà del tutto simili a quelle viste per la metrica euclidea su $\mathbb{R}$

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ se e solo se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
4. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (disuguaglianza triangolare)

Nota 4. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale (base canonica) di vettori. Questo significa che esistono n vettori

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0) \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

tali che

1. $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = 0$, se $i \neq j$, (ortogonalità),
2. $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = 1$, $i = 1, \ldots, n$, (normalità)
3. per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n$ (essere base)

Attraverso la metrica possiamo definire gli intorni sferici e le sfere.

Definizione 5. *Siano $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, si dice intorno sferico di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ l'insieme*

$$B_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \epsilon\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ un'intorno sferico è un cerchio di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ privato della circonferenza.

Definizione 6. *Siano $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, si dice sfera di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ l'insieme*

$$S_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \epsilon\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ una sfera è una circonferenza di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio ϵ.

Esercizio 1. Rappresentare sfere e intorni sferici per $n = 3$.

2 Topologia su $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathfrak{B}$ che ha per elementi tutti gli intorni sferici di $\mathbb{R}^n$ è una *base* per la topologia. Attraverso gli intorni sferici possiamo definire le nozioni topologiche fondamentali.

Definizione 7. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che $\boldsymbol{x} \in X$ è* interno *a X se esiste $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset X$.*

Definizione 8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che A è aperto se tutti i suoi punti sono interni.*

L'insieme $\emptyset$ è aperto per definizione.

Definizione 9. *Sia* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *diremo che* B *è chiuso se* $B^c = \mathbb{R}^n \backslash B$ *è aperto.*

Definizione 10. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme e* $\bar{x} \in X$. *Diremo che* $\bar{x}$ *è punto di frontiera per* X *se non è interno né esterno.*

Definizione 11. *Sia* $X \subset \mathbb{R}^n$ *diremo che* X *è limitato se esiste* $B_\epsilon(\mathbf{0})$ *e* $X \subset B_\epsilon(\mathbf{0})$.

L'insieme $\mathfrak{T}$ formato da tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$ prende il nome di topologia (euclidea) su $\mathbb{R}^n$ e non è difficile vedere che valgono le seguenti:

1. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathfrak{T}$
2. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}, n \in \mathbb{N}$.

Definizione 12. *Sia* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *si dice intorno di* $\boldsymbol{x}$ *un qualsiasi insieme* $I_{\boldsymbol{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ *che contiene un aperto* $A \subseteq I_{\boldsymbol{x}}$ *e contiene* $\boldsymbol{x} \in I_{\boldsymbol{x}}$.

Nota 13. Lo spazio topologico $\mathbb{R}^n$ è *separabile* ossia dati due punti distinti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ esistono almeno due intorni $I_{\boldsymbol{x}}$ e $I_{\boldsymbol{y}}$ che sono disgiunti $I_{\boldsymbol{x}} \cap I_{\boldsymbol{y}} = \emptyset$.

Esempio 14. Determinare il dominio della funzione

$$f(x.y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(x + y)}$$

e studiarne i principali aspetti topologici.

Attraverso la topologia possiamo definire i concetti alla base della definizione di limite e di continuità:

Definizione 15. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme e* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. *Diremo che* $\boldsymbol{x}$ *è punto di accumulazione per* X *se per ogni* $I_{\boldsymbol{x}}$ *si ha* $I_{\boldsymbol{x}} \cap X \backslash \{\boldsymbol{x}\} \neq \emptyset$.

Definizione 16. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme e* $\boldsymbol{x} \in X$. *Diremo che* $\boldsymbol{x}$ *è punto isolato di* X *se esiste un intorno* $I_{\bar{\boldsymbol{x}}}$ *tale che* $I_{\boldsymbol{x}} \cap X \backslash \{\boldsymbol{x}\} = \emptyset$.

Per le funzioni di una sola variabile l'ampliamento $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ha permesso di considerare gli elementi $\pm\infty$ come punti di accumulazione tramite l'introduzione dei loro intorni e di dare quindi una definizione di limite anche per $x \to \pm\infty$. Dal momento che $\mathbb{R}^n$ non è ordinato se $n \geq 2$, non possiamo procedere come per $\mathbb{R}$. In ogni caso rimane possibile introdurre il concetto di limite per $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$: ciò consentirà di descrivere il comportamento di funzioni per valori sempre più grandi di $\|\boldsymbol{x}\|$. Poniamo quindi

$$\tilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

e definiamo intorno sferico di ∞, oltre ad $\tilde{\mathbb{R}}^n$ stesso, un qualsiasi insieme del tipo

$$B(\infty) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{y}\| > a\} \cup \{\infty\}, \qquad a \in [0, +\infty).$$

In questo modo possiamo parlare di ∞ come punto di accumulazione di un insieme contenuto in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. Non è difficile vedere che l'insieme dei suoi punti di accumulazione è

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} \cup \{\infty\}.$$

3 Limiti e continuità

Definizione 17. *Sia* $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $\boldsymbol{x}_0 \in \tilde{\mathbb{R}}^n$ *punto di accumulazione per* X. *Diremo che*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno U *di* l *esiste un intorno* V *di* $\boldsymbol{x}_0$ *tale che se* $\boldsymbol{y} \in V \cap X \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ *allora* $f(\boldsymbol{y}) \in U$.

Una definizione equivalente alla precedente si ottiene sostituendo gli intorni con gli intorni sferici. Consideriamo ora alcuni esempi semplici utilizzando il paraboloide ellittico. Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|(x, y)\| < \delta$ allora $|f(x, y)| < \epsilon$. In effetti, osservato che

$$|f(x, y)| = \|(x, y)\|^2 < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \|(x, y)\| < \sqrt{\epsilon}$$

basta prendere $\delta = \sqrt{\epsilon}$ per completare la verifica. In modo analogo (si lascia per esercizio) si può verificare che

$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = +\infty.$$

Non è difficile vedere che si estendono a funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ proprietà generali dei limiti di funzioni reali di variabile reale che non dipendono dalla struttura di ordine:

- teorema di unicità del limite
- limite di somma e prodotto per uno scalare sono uguali, rispettivamente, alla somma e al prodotto dei limiti qualora questi esistano finiti

e proprietà che dipendono dal fatto che il codominio $\mathbb{R}$ è ordinato

- Teorema della permanenza del segno
- Teorema del confronto

Se la definizione di limite di funzione reale di variabile reale, con relative proprietà, si estende in modo agevole alle funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ le cose sono diverse quando cerchiamo di *calcolare* i limiti.

Esempio 18. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2}$$

che ha come dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ calcolare

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2}.$$

dove $(0, 0)$ è di accumulazione per D.

Per risolvere esercizi di questo genere è molto utile il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio in quanto facile.

Teorema 19. *Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione e $\boldsymbol{x}_0 \in \tilde{\mathbb{R}}^n$ un punto di accumulazione per X. Allora*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}} \quad (\boldsymbol{x} \in A)$$

e $\boldsymbol{x}_0$ di accumulazione per A.

Consideriamo allora

$$A = \{(x, y) \in D: y = mx, m \in \mathbb{R}\}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1 + x^2 + 3m^2x^2)}{x^2 + 5m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3m^2)x + o(x)}{(1 + 5m^2)} = 0.$$

Proviamo allora a verificare a partire dalla definizione che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} = 0.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|\bar{x}\| < \delta$ allora

$$\left| \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} - 0 \right| < \epsilon.$$

Osserviamo che

$$0 \leq \left| \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} \right| \leq \frac{|y|(x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} \leq |y|$$

e quindi per il Teorema del confronto (che continua a valere!) il limite è zero.

Esempio 20. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{yx}{x^2 + y^2}$$

che ha come dominio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ e proviamo a calcolare, se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{x^2 + y^2}.$$

dove $(0, 0)$ è di accumulazione per D.

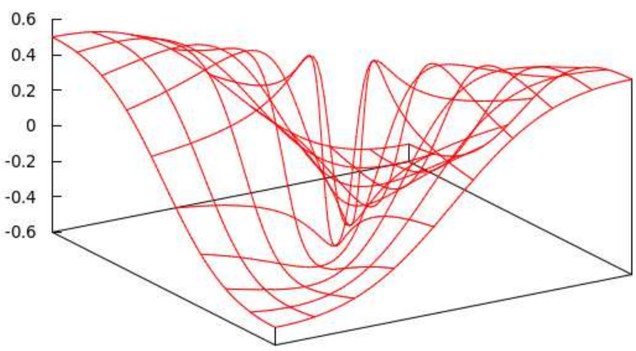

Figura 2. Grafico di $z = xy/(x^2 + y^2)$

Consideriamo allora

$$A_1=\{(x,y)\in D\colon y=x\}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Se però consideriamo

$$A_2=\{(x,y)\in D\colon y=0\}$$

e calcoliamo il limite avremo

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0\neq\frac{1}{2}.$$

Quindi il limite non esiste.

3.1 Coordinate polari

Un certo numero di limiti per funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ si può calcolare ricorrendo ad un cambiamento in coordinate polari. Dato un qualsiasi punto $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ esso può essere rappresentato da

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

con $\rho>0$ e $\theta\in[0,2\pi)$. Si vede subito che

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\|\boldsymbol{x}\|$$

mentre θ è l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ e $\boldsymbol{x}$.

Vediamo ora di chiarire la questione relativa al cambiamento di variabili nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l\in\mathbb{R}.$$

Per definizione deve essere che per ogni $\epsilon>0$ esiste un $\delta>0$ tale che

$$\|\boldsymbol{x}\|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(\boldsymbol{x})-l|<\epsilon.$$

Possiamo riformulare in coordinate polari la cosa dicendo che per ogni $\epsilon>0$ esiste un $\delta>0$ tale che

$$\rho<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-l|<\epsilon$$

con $\theta\in[0,2\pi)$. Ciò equivale a dire

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)=l\in\mathbb{R}$$

indipendentemente dal valore di θ! Vediamo un paio di esempi che permettano di capire il senso della cosa.

Esempio 21. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

Passando in coordinate polari il limite diventa

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\cos^2\theta$$

e il suo valore è 0 indipendentemente da θ.

Esempio 22. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}.$$

Passando in coordinate polari il limite diventa

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0.$$

Un esempio molto interessante di funzione in due variabili è il seguente

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 \le y \le 2x^2 \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

di cui vogliamo vedere se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Ora

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = 0$$

ma anche che

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = 1$$

e quindi il limite non esiste.

La definizione di continuità data per le funzioni reali di variabile reale si estende in modo naturale al caso $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definizione 23. *Sia* $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $\boldsymbol{x}_0 \in X$

i. se $\boldsymbol{x}_0$ *è un punto di accumulazione per* X *diremo che* f *è continua in* $\boldsymbol{x}_0 \in X$ *se*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

ii. se $\boldsymbol{x}_0$ *è un punto isolato di* X *diremo che* f *è continua in* $\boldsymbol{x}_0$ *per definizione.*

Inoltre f *si dice continua in* X *se lo è in ogni punto di* X.

Esempi semplici di funzioni continue sono le proiezioni

$$p_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{x} \to p_j(\boldsymbol{x}) = x_j$$

con $j = 1, \ldots, n$. Non è poi difficile vedere che:

a) somma e prodotto per uno scalare di funzioni continue sono continui

b) la composizione di funzioni continue è continua ossia se $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue nel loro dominio e $f(X) \subseteq Y$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in X.

Esempio 24. Dire se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua nei punti appartenenti alla retta $x = 0$.

Soluzione. Distinguiamo due casi

a) (x, y_0) con $y_0 \neq 0$. Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{(y_0+mx)^2}{x^2} \arctan(x^2+(y_0+mx)^2) = +\infty$$

e quindi la funzione non è continua;

b) $(x, y) = (0, 0)$. Allora se $y = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \arctan(x^2+x) = 1 \neq 0$$

e quindi la funzione non è continua.

Esempio 25. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua nei punti appartenenti alla retta $x = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(y) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3.2 Teorema di Weierstrass

Analogamente a quanto visto per lo spazio topologico $\mathbb{R}$

Definizione 26. *Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato.*

Per le funzioni continue si mantiene valido il seguente importante.

Teorema 27. (di Weierstrass) *Sia $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'insieme compatto K. Allora*

a) $f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}$,

b) in K esistono $\max f$ e $\min f$.

4 Funzioni vettoriali

Una seconda famiglia importante di funzioni in più variabili è rappresentata dalle funzioni del tipo

$$\boldsymbol{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

con $m \geq 2$. Ad esempio,

$$\boldsymbol{f}: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

individua la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine di $\mathbb{R}^2$. Per questo tipo di funzioni la nozione di limite si estende in modo del tutto analogo a quanto visto per le funzioni scalari.

Definizione 28. *Sia $\bar{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X. Diremo che*

$$\lim_{x\to x_0} \bar{f}(x) = \bar{l} \in \tilde{\mathbb{R}}^m$$

se per ogni intorno U di l esiste un intorno V di x_0 tale che se $y \in V \cap X \backslash \{x_0\}$ allora $\bar{f}(y) \in U$.

Tuttavia è molto importante osservare che esiste un modo alternativo ed equivalente al precedente di introdurre il limite. Nel caso del limite finito ad esempio si ha

Definizione 29. *Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X. Diremo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^m$$

con

$$\boldsymbol{l} = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \lim_{x \to x_0} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_m(x) \right)$$

se $\lim_{x \to x_0} f_i(x)$ esiste finito per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Quindi di fatto lo studio del limite si riconduce allo studio di m limiti di funzioni reali di variabile reale. Risulta piuttosto spontaneo anche estendere la nozione di continuità nel seguente modo.

Definizione 30. *Sia $\boldsymbol{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in X$. Diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in x_0 se lo sono le componenti $f_i: X \to \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Si dimostra senza problemi che questa definizione è equivalente alla seguente.

Definizione 31. *Sia $\boldsymbol{f}: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in X$*

i. se x_0 è un punto di accumulazione per X diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x_0)$$

ii. se x_0 è un punto isolato di X diremo che $\boldsymbol{f}$ è continua in x_0 per definizione.

Definizione 32. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, è una funzione*

$$\gamma: I \to \mathbb{R}^m$$

continua in I.

L'immagine $\gamma(I)$ prende il nome di *sostegno* della curva.

Esempio 33. Studiare le curve

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x) \qquad \text{(circonferenza)}$$

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x, x) \qquad \text{(elica cilindrica)}$$