Serie di Fourier

Scopo: approssimare funzioni periodiche (anche discontinue) con $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$

onde sonore = funzione periodica $f(x)$

- armoniche fondamentali

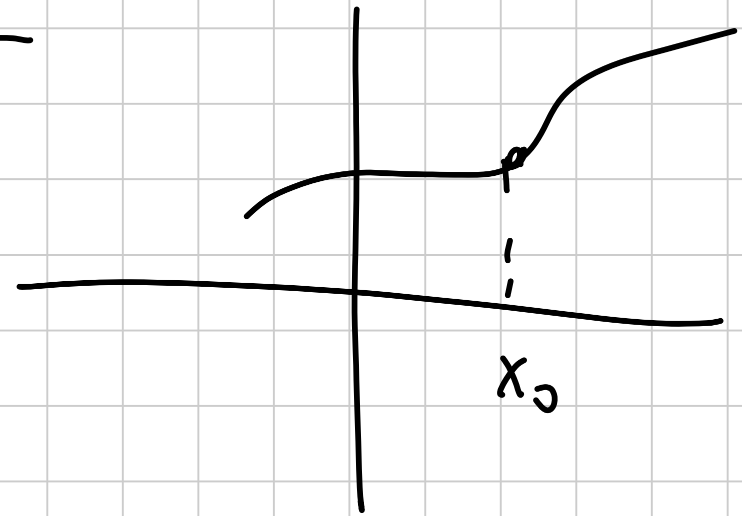
armoniche fond. | $A \sin(nx)$
$B \cos(nx)$

frequenza

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 3x + b_1 \cos 5x + b_8 \cos 12x$$

Polinomio di $\underline{\underline{\text{Taylor}}}$

$f(x)$ vicino a x_0



$$f(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots + a_n (x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

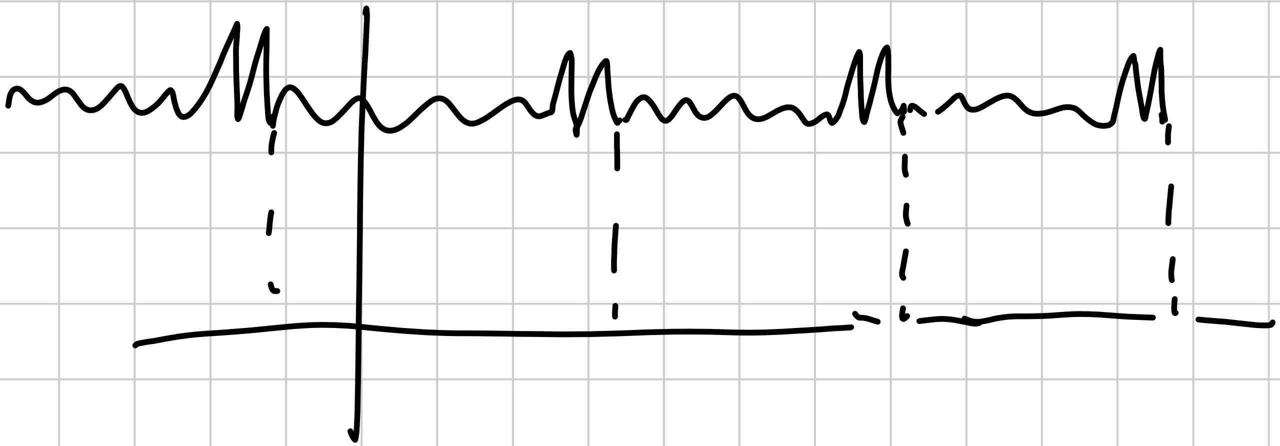
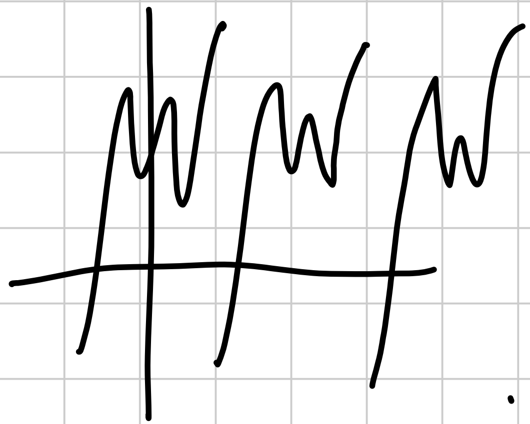
$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i (x-x_0)^i$$

serie di Taylor

vicino a $x = x_0$

Fourier

Cosa succede se $f(x)$ è periodica?

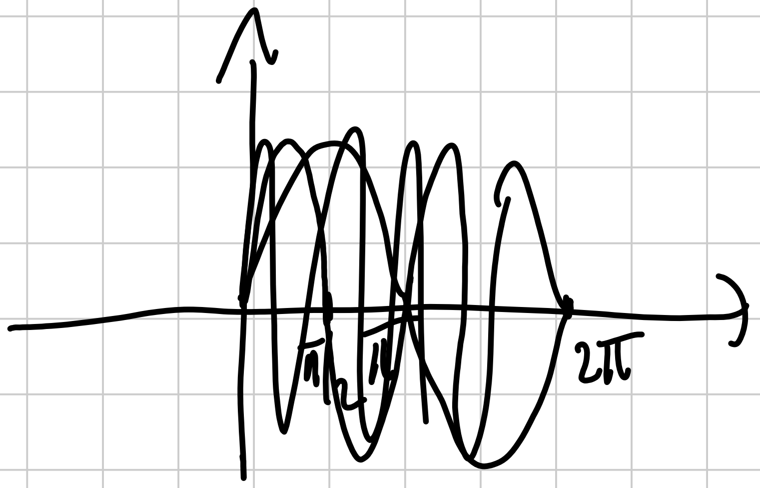
Prendo $f(x)$ periodica di periodo 2π

$$f(x+2k\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definisco i polinomi trigonometrici attraverso le funzione $\operatorname{sen} nx$ e $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$

queste sono f. 2π-periodiche

$$\operatorname{sen}(n(x+2\pi)) = \operatorname{sen}(nx + 2n\pi) = \operatorname{sen} nx$$



$n=1$ $\operatorname{sen} x$

$n=2$ $\operatorname{sen} 2x$

$n=3$ $\operatorname{sen} 3x$

polinomio trigonometrico $= a_1 \cos x + a_2 \cos 2x +$

$+ \dots + a_N \cos Nx + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x +$

$+ \dots + b_N \operatorname{sen} Nx + a_0 = S_N(x)$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen} nx + \frac{a_0}{2}$$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$ coefficienti del polin. trig.

__Domanda__: Ho una $f(x)$ 2π-periodica.
Presi opportuni a_n e b_n posso dire che $S_N(x) \longrightarrow f(x)$ se $N \to +\infty$?

__OSS.__ ... serie di __funzioni__

l'anno scorso: serie __numerica__

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \iff \lim_{N \to +\infty} S_N =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = S$$

se abbiamo serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x) \iff \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si dice che la serie converge **puntualmente** a S

f.to per punto $(\forall x \in \mathbb{R})$ si considera la serie di numeri $\sum \underbrace{f_n(x_0)}_{a_n}$

Costruzione della serie di Fourier associata ad f

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π, continua a tratti

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx\, dx$$

coefficienti di Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

e considero la serie trigonometrica con tali coefficienti

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx\right)$$

$||$

dove a_n e b_n sono

definita sopra

$\Downarrow$

Serie di <u>Fourier</u> <u>associata</u> ad f

<u>domanda</u>: che relazione c'è tra $f(x)$ e $S(x)$?

Teo. di <u>convergenza</u> <u>puntuale</u> della <u>serie di Fourier</u>

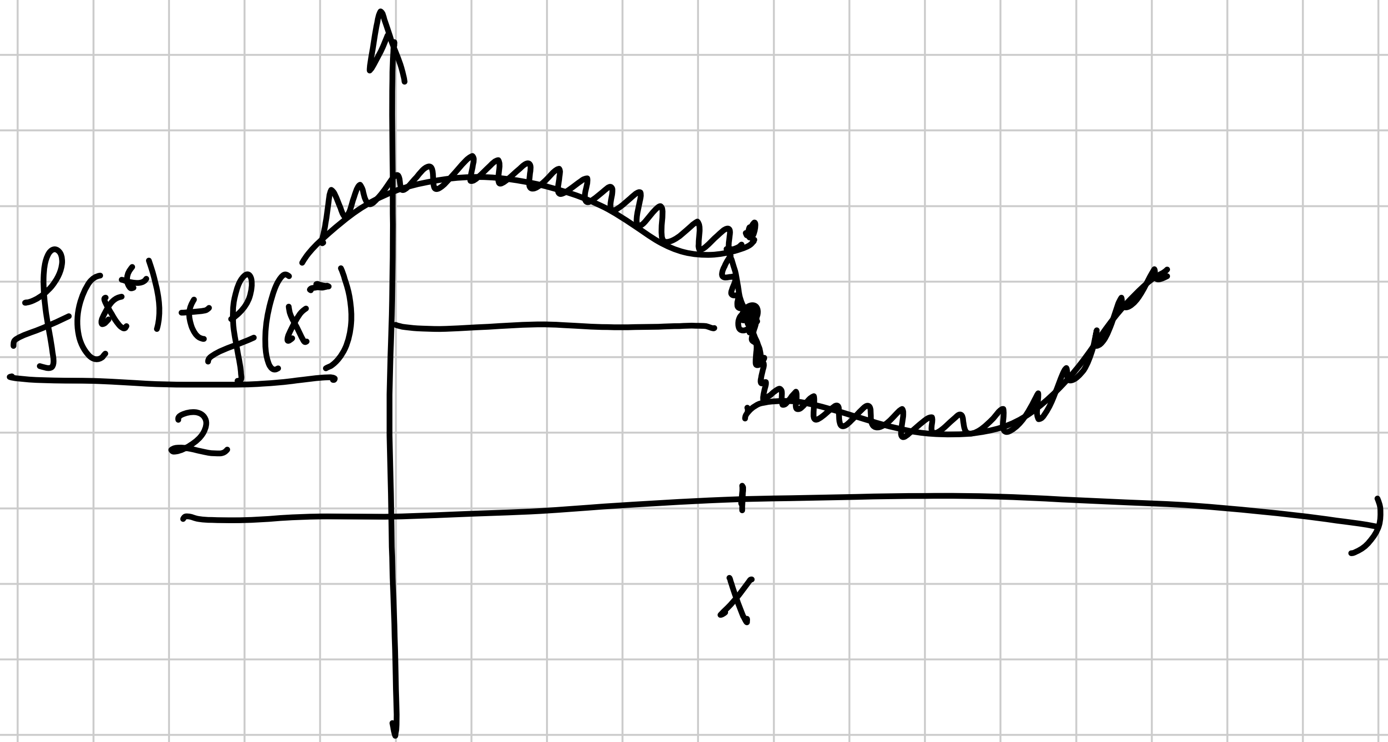
__Def.__ $f(x)$ è __regolare__ __a tratti__ in $[a,b]$ se $\exists$ al più un numero finito di punti x_i di $[a,b]$ in cui f __non__ è continua ma tali che f è derivabile fuori da tali punti e esistono finiti i $\lim\limits_{x \to x_i^{\pm}} f'$

__Teo.__ f periodica di periodo 2π e __regolare__ a tratti allora $S(x)$, la serie di Fourier associata a f, converge puntualmente a

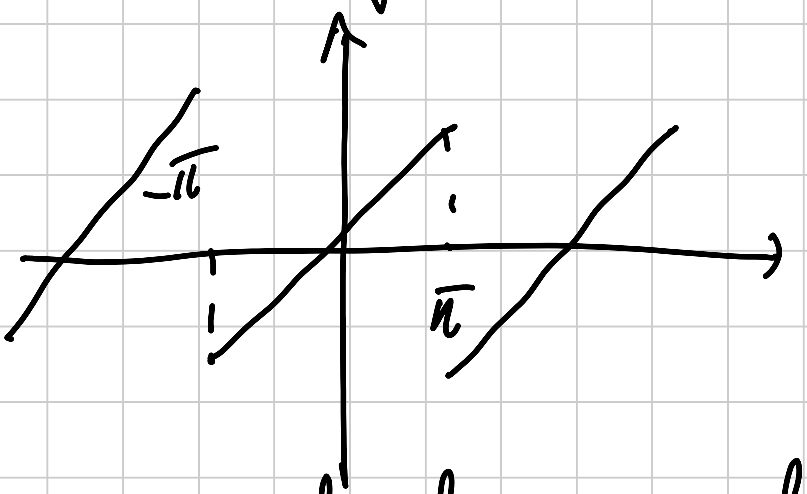
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e in particolare se f è __continua__ in x

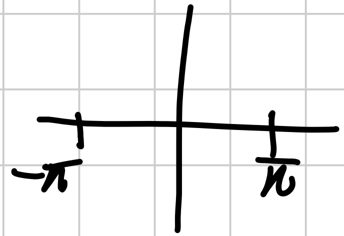
$$S(x) = f(x)$$


$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
x
t

Es. $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$ la estendo periodica



Calcolo la serie di Fourier associata ad f



mi calcolo i coeff. di Fourier a_n e b_n.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \cos nx}_{\text{dispari}} \, dx = 0 \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \operatorname{sen} nx}_{pari}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{1}{n}\left(-\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\cos nx\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \cancel{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[-2\frac{\cancel{\pi}}{n}(-1)^n\right] = \frac{2}{n}(-1)(-1)^n =$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1} = b_n \qquad a_n = 0$$

Allora la serie di Fourier associata a $f(x)$ è

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx$$

il teorema ci dice che

nei punti in cui f è continua

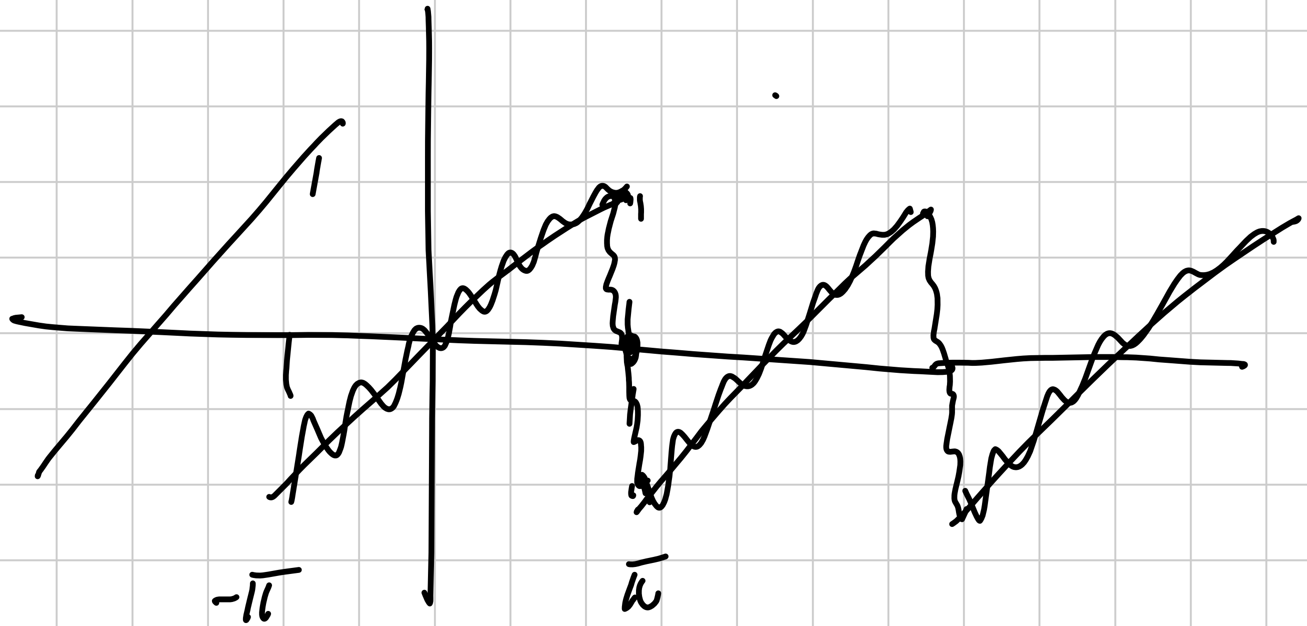
$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx = x$$

se invece di $+\infty$ si scrive

$$2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx = S_N(x)$$ polinomio trigonom.

es. $N = 10$

$$S_{10}(x) = 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x \quad \cdot \quad - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 10x\right)$$



OSS. Se $f(x)$ è **PARI**

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen} nx}_{\text{dispari}} \, dx = 0$$

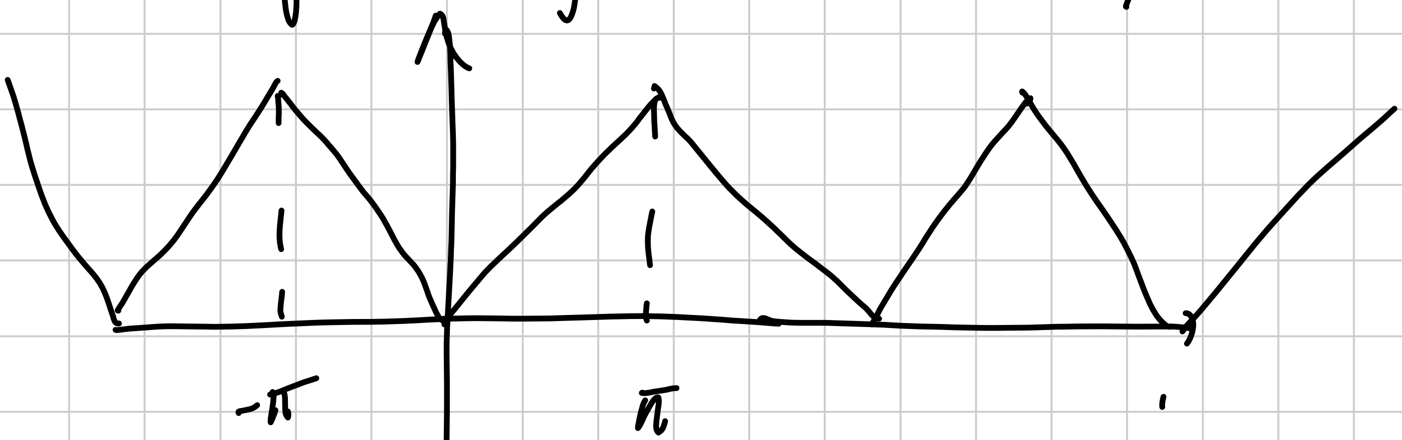
la serie di Fourier associata ad una funzione PARI contiene solo gli $a_n \cos nx$

Analogamente se $f(x)$ è **dispari**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos nx}_{\text{dispari}} \, dx = 0$$

la serie di Fourier contiene solo $b_n \underline{\operatorname{sen} nx}$.

Esempio $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$



$f(x)$ è Pari $b_n = 0$

a_n $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \cancel{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\pi^2 = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x|\cos(nx)}_{\text{pari}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\cancel{x\,\frac{1}{n}\,\operatorname{sen} nx\,\Big|_0^{\pi}}}_{=0} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\, dx \right] =$$

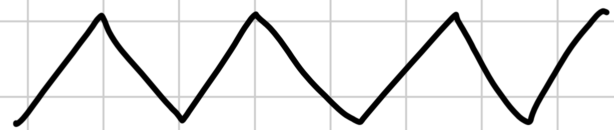
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\,\Big|_0^{\pi} =$$

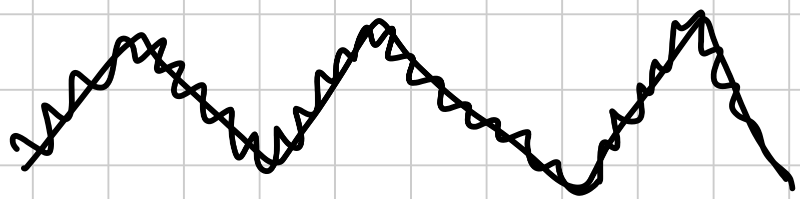
$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ dispari} \end{cases} = a_n$$

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n^2} \cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left[(2n+1)x\right].$$

$=$ 

S_N per es. S_{100} 

<u>oss.</u> Se f è periodica di periodo L invece che 2π, prendo

$$g(y) = f\left(\frac{L}{2\pi} y\right)$$

$$g(y+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(y+2\pi)\right) =$$

$$= f\left(\frac{L}{2\pi} y + L\right) = f\left(\frac{L}{2\pi} y\right) = g(y)$$

quindi la g è periodica di periodo 2π

$$\operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi}{L} x\right)$$

$$\cos\left(n \frac{2\pi}{L} x\right)$$

questi sono i polinomi trigonom. associati con i relativi coeff. a_n, b_n.