Canale 1, 10 Ottobre

Curve

$$r(t) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$ curva continua

$$t \longrightarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$n = 2$

$n = 3$

Grafico di una funzione $f(x)$

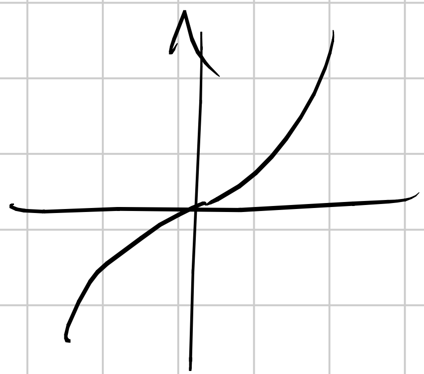
$y = f(x)$, $x \in [a,b]$

f continua

$$r(t): \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

curva cartesiana

Una curva cartesiana è sempre semplice



es. $f(x) = x^3$
$x \in \mathbb{R}$

In forma parametrica

$$r(t):\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$r(t) = \left(t,\ t^3\right)$$

Derivata di $r(t)$ (vettore derivato)

$$r(t) = \left(x_1(t),\ x_2(t),\ \dots\ x_m(t)\right)$$

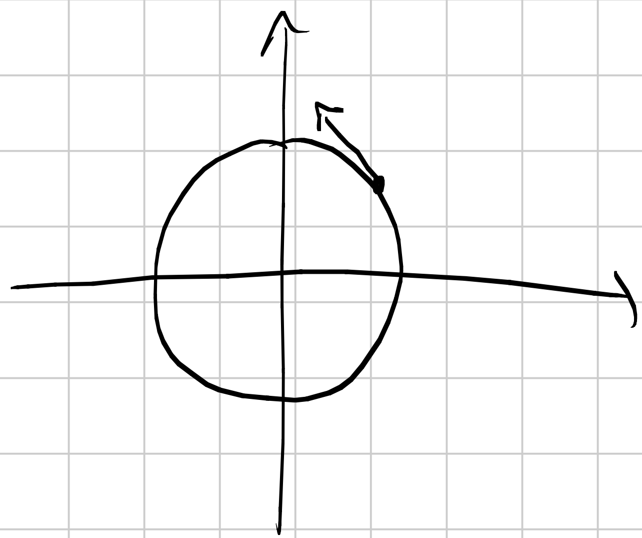
$$r'(t) = \left(x_1'(t),\ x_2'(t),\ \dots\ x_m'(t)\right)$$

es.

vettore derivato

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$



$r'(t)$ è il vettore tg al sostegno di $r(t)$

$r'(t)$ è la velocità del punto all'istante t

Def. $r: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un arco di curva **REGOLARE** se $r(t) \in C^1(I)$ e

$r'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$

$\downarrow$ (vettore derivato)

es. $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in I$

$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \neq (0, 0)$

$\forall t$

$r'(t) \neq 0 = (0, 0, \dots 0)$

$\Updownarrow$

$r'(t) = (x_1', x_2', \dots x_n')$

$$|r'(t)| \neq 0 \quad \forall t$$

$$(x_1')^2(t) + (x_2')^2(t) + \cdots + (x_m')^2(t) \neq 0 \ , \forall t$$

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$
$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$
$$|r'|^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \neq 0$$

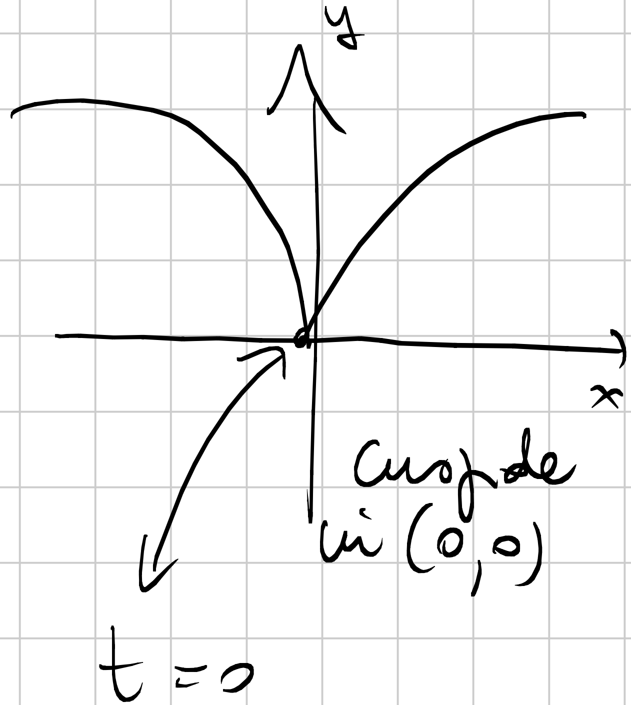
<u>es.</u> $r(t) = (t^3, t^2) \ , \ t \in \mathbb{R}$

$$r'(t) = (3t^2, 2t) = (0,0)$$

se $t = 0$

non è regolare

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t = \sqrt[3]{x} \qquad y = \sqrt[3]{x^2}$$



∄ la retta tg in (0,0)

ma la curva è regolare a tratti

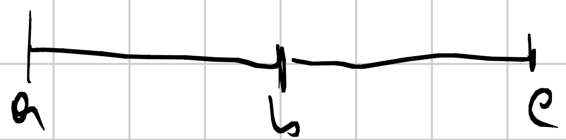
Def. $r : I \to \mathbb{R}^n$. Se I si può suddividere in un numero finito di intervalli in cui r è regolare e se r è continua in I

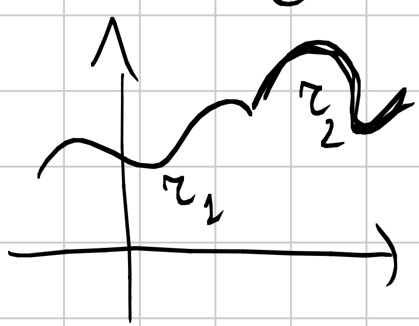
$\Rightarrow$ <u>curva è regolare a tratti</u>

<u>Def.</u> $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$r_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^m$ $\qquad r_1(b) = r_2(b)$

$$r = r_1 \cup r_2 \qquad r = \begin{cases} r_1 & t \in [a,b] \\ r_2 & t \in [b,c] \end{cases}$$





es. Asteroide

$$r(t) = (\cos^3 t, \ \operatorname{sen}^3 t) \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

$$r'(t) = (3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t), \ 3\operatorname{sen}^2 t \cos t)$$

$$r'(t) \neq 0$$

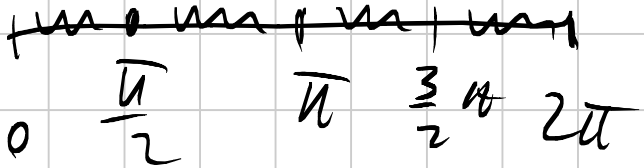
$$|r'(t)|^2 \neq 0$$

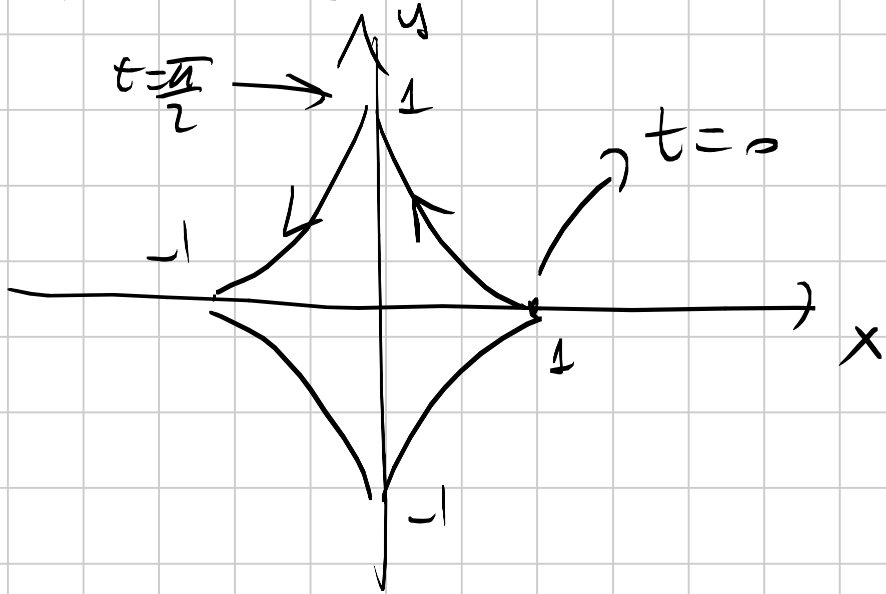
$$|r'(t)|^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t$$

$$= 9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) =$$

$$= 9 \cos^2 t \, \text{sen}^2 t = 0$$

$t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3}{2}\pi$, $t = 2\pi$

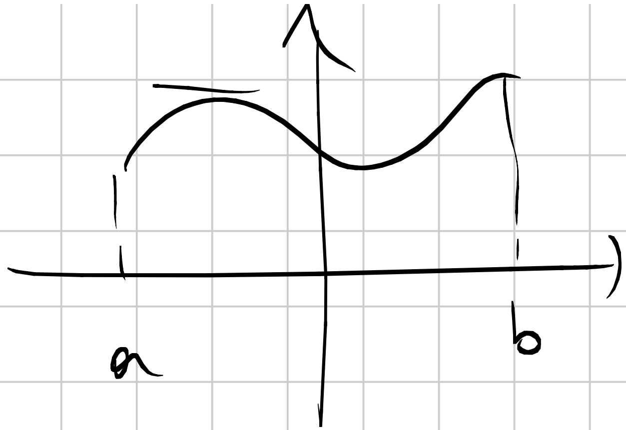




è regolare a tratti

<u>oss.</u> le curve cartesiane di funzioni $f(x) \in C^1$ sono sempre <u>regolari</u>

$$y = f(x), \quad x \in [a,b]$$



$$f \in C^1([a,b])$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$r(t) = (t, f(t))$$

$$r'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$$

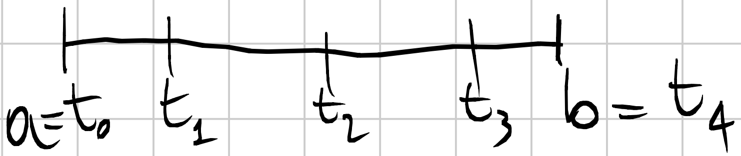
sempre regolare

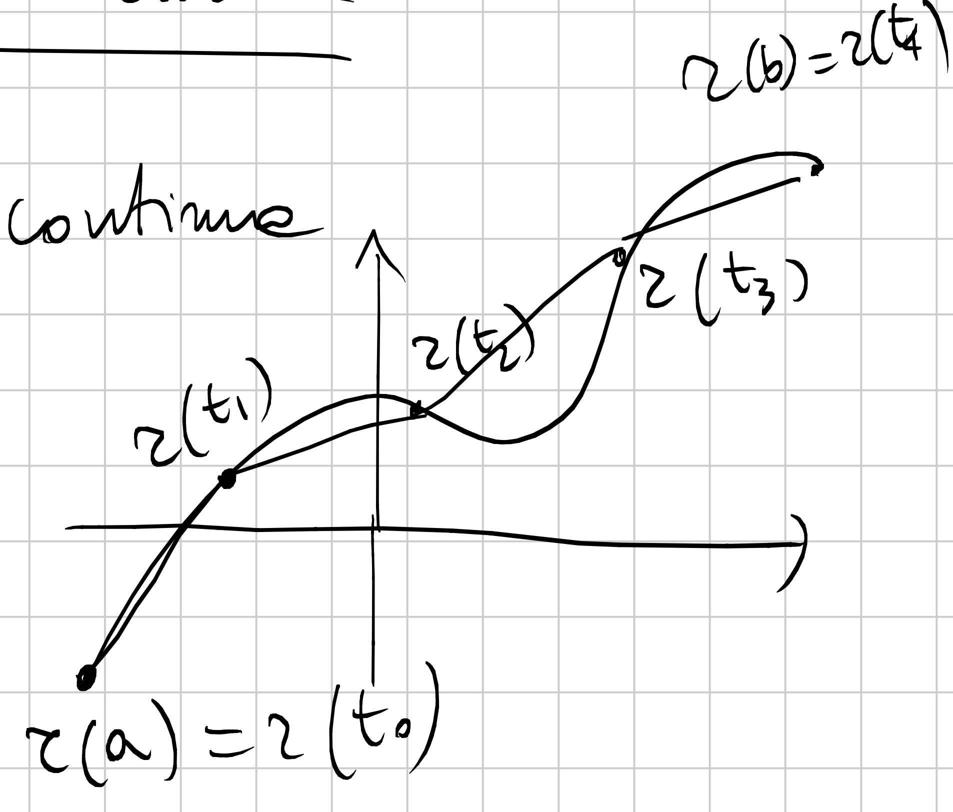
$$\boxed{|r'(t)| = \sqrt{1 + f'^2(t)}}$$

Lunghezza di una curva

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ continua

$t \in [a,b]$





Considero una partizione di $[a,b]$

Considero la poligonale ottenuta unendo i punti $r(t_i)$ e misuro i segmenti

$$|r(t_j) - r(t_{j-1})|$$

prendo $$\ell(P) = \sum_{j=1}^{n} |r(t_j) - r(t_{j-1})|$$

lunghezza poligonale

Faccio variare tutte le possibili partizioni di $[a,b]$

Def. $r : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ curva continua è rettificabile se $l(r) := \sup_{\mathcal{P}} l(P) < +\infty$

e in tal caso $l(r)$ è la **lunghezza** della curva r

$\mathcal{P}$ = tutte le partizioni di $[a,b]$

P = poligonali costruite in base alla partizione scelta

Come si fa a calcolare la lunghezza di una curva?

<u>Teorema</u> $r : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, curva <u>regolare</u>

Allora r è rettificabile e

$$\ell(r) = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

<u>es.</u> in $\mathbb{R}^2$ $\quad r(t) = (x(t), y(t))$

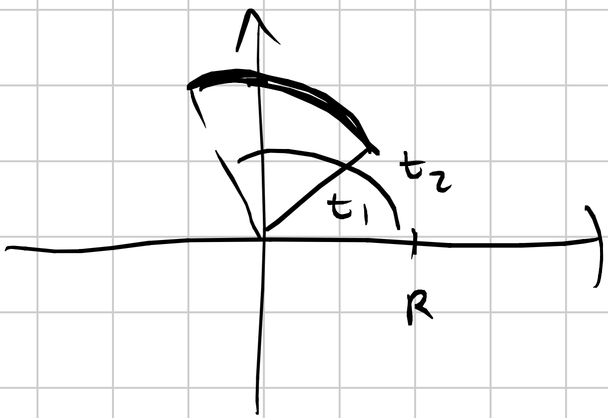
$$r'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

<u>es.</u> $r(t) = (R\cos t,\ R\,\mathrm{sen}\,t)$

$t \in (t_1, t_2)$



arco su circonferenza di raggio R

$$r'(t) = (-R\,\mathrm{sen}\,t,\ R\cos t)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{R^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$l(r) = \int_{t_1}^{t_2} R \, dt = R(t_2 - t_1)$$

$x \quad t \in [0, 2\pi] \qquad t_1 = 0 \quad t_2 = 2\pi \qquad l(r) = 2\pi R$

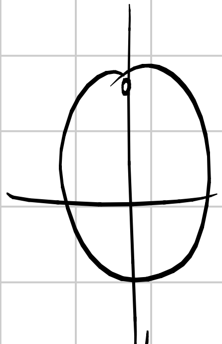
$$r(t) = (R\cos t, R \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 4\pi]$$

$t_2 = 4\pi, \quad t_1 = 0$

$\ell(r) = 4\pi R$ la lunghezza tiene conto del cammino percorso

non è la lunghezza del sostegno.

es. Percorse



$r(t) = \left(R\sin t, R\cos t\right)$

stesso risultato di sopra.

OSS Se la curva è regolare a tratti mi posso misurare la lunghezza di ogni singolo tratto e poi sommarle.

---

in $\mathbb{R}^3$ $\quad r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$

$t \in [a,b]$

$$r'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

es. Elica cilindrica

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \neq 0$$

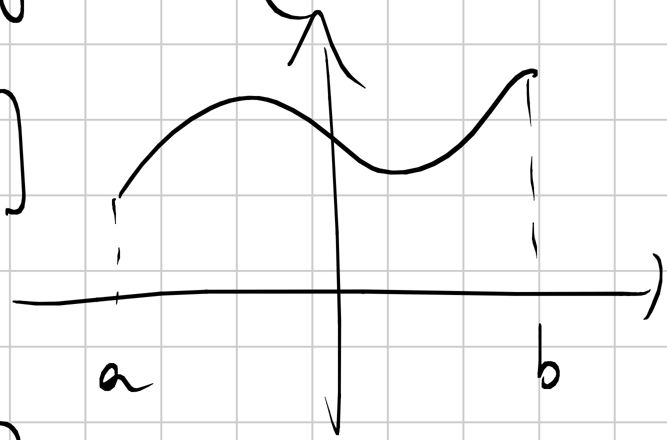
la curva è regolare

$$l(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

Lunghezza di un grafico (curva cartesiana)

$y = f(x)$, $x \in [a, b]$



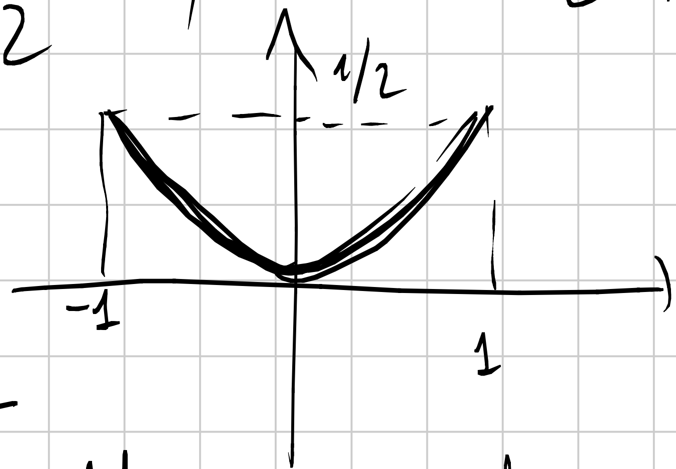
$$r: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$r': \begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(t) \end{cases} \quad |r'| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt}$$

Es. $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad x \in [-1, 1]$

$f' = x$



$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$dt = \cosh\tau \, d\tau$

$t = \operatorname{senh}\tau$

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

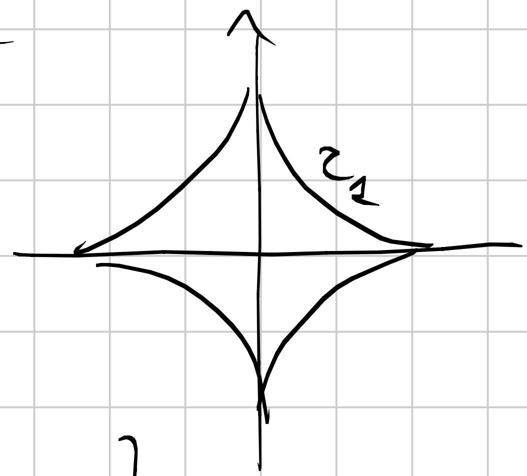
$$1 + t^2 = 1 + \operatorname{senh}^2\tau =$$
$$= \cosh^2\tau$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 \tau}\, \cosh \tau \, d\tau = \int \cosh^2 \tau \, d\tau =$$

$$= \ldots \text{ per parti } = \ldots$$

es.

Lunghezza Asteroide



$$r(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\ell(r) = 4\, \ell(r_1) \quad \text{per simmetria}$$

$\tau_1: \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ arco nel 1° quadrante

$$\tau'(t) = \left(3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t),\ 3\operatorname{sen}^2 t \cos t\right)$$

$$|\tau'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9\operatorname{sen}^4 \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} = 3\cos t \operatorname{sen} t$$

$$l(\tau_1) = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t \, dt$$

$\operatorname{sen} t = \tau$

$\cos t \, dt = d\tau$

$$= \int_0^1 3\tau \, d\tau = 3 \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$l(\tau) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$