Canale 1, 3 ottobre

chiave MOODLE C1A2

maiuscole

Formula di derivazione di una <u>funzione composta</u>

$$h(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$$

$g(t) = \operatorname{sen} t \qquad f(x,y) = xy$

$h(x,y) = g(f(x,y))$

$h_x = \cos(xy)\, y = g'(f(x,y)) \cdot f_x$

$h_y = \cos(xy)\, x = g'(f(x,y)) \cdot f_y$

In generale $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h(\underline{x}) = g(f(\underline{x})) \qquad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x}) = g'\left(f(\underline{x})\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})}$$

<u>es.</u> $h(x, y, z) = \left(x \log(yz)\right)^2$

$$h_x = 2\left(x \log(yz)\right) \cdot \log(yz)$$

$$h_y = 2\left(x \log(yz)\right) \cdot x \frac{1}{yz} \cdot z$$

$$h_z = 2\left(x \log(yz)\right) \cdot x \frac{1}{yz} \cdot y$$

Estremi liberi di una funzione

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots x_n)$

$\max f$

$\min f$

Def. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in A$

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>massimo assoluto</u> per f in A se $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$, $\forall \underline{x} \in A$.

$f(\underline{x}_0)$ massimo assoluto

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>minimo assoluto</u> per f in A
se $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$, $\forall \underline{x} \in A$

$f(\underline{x}_0)$ minimo assoluto

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>massimo locale</u> (relativo) per f
se $\exists$ un intorno di $\underline{x}_0$ t.c.
$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$, $\forall x \in U$

$f(\underline{x}_0)$ massimo relativo.

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>minimo locale</u> (relativo) - - -
- - - - - - - $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$, $\forall x \in U$

$f(x_0)$
minimo relativo

questi punti si dicono
ESTREMI di una funzione (globali o locali)

Estremi liberi sono gli estremi che sono assunti in punti interni al dominio

$f(x) = x^2$

$x \in [-1, 1]$

Estremi vincolati se sono assunti su un insieme chiuso o sulla frontiera del dominio.

es. $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

$f = 0$ estremo libero

$f = 1$ estremo vincolato

Pb. come si fa a calcoli?

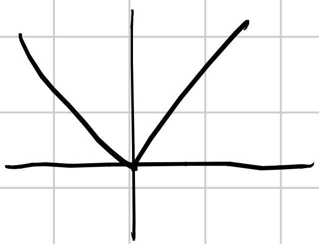
Condizione necessaria per gli estremi liberi

Teorema di Fermat

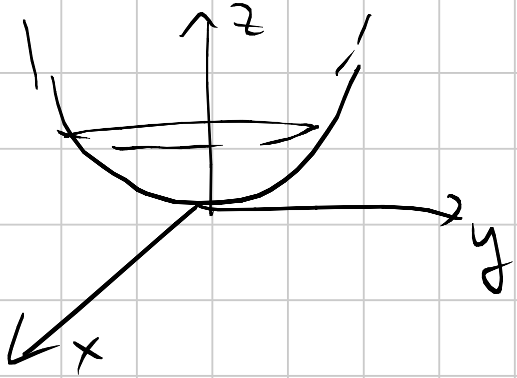
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}_0 \in A$ p.to di massimo o minimo locale per f.

Se f è derivabile in $\underline{x}_0$ allora $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

$n=1$ $\quad f(x) = |x|$



Es. $f(x,y) = x^2 + y^2$



$f \geq 0$

$f(0,0) = 0$

$(0,0)$ p.to di minimo assoluto

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(0,0) = (0,0) = \underline{0}$

Oss. Non vale il viceversa cioè se

$\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0} \not\Rightarrow \underline{x}_0$ punto di estremo.

es. $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x = 0$

$f_y = -2y = 0$

$\nabla f = 0$ in $(0,0)$

$y = 0$

$f = x^2$

$x = 0$

$f = -y^2$

Def. $\underline{x}_0$ è un punto di sella per f se $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$ e $\nexists$ nessun intorno di $\underline{x}_0$ nel quale $\underline{x}_0$ è p.to di massimo o di minimo

---

Def. I punti t.c. $\nabla f(\underline{x}) = 0$ si chiamano <u>punti critici</u> o <u>stazionari</u>

- $\underline{x}_0$ estremo locale e f è derivabile in $\underline{x}_0$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un p.to critico

- $\underline{x}_0$ è un p.to critico $\not\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un p.to di estremo

<u>Es.</u> Trovare i <u>punti critici</u> di

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$$

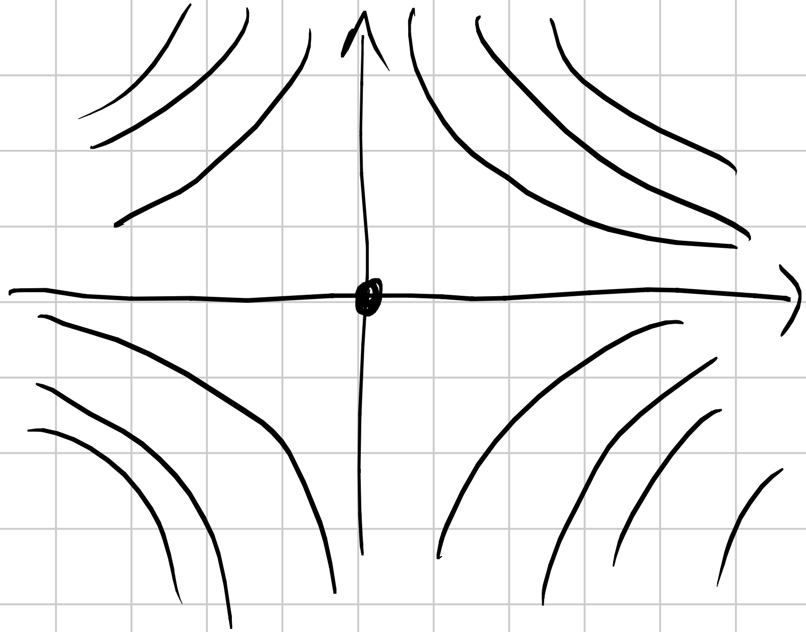
$$f_x = \cos(xy) \cdot y = 0$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x = 0$$

$(0,0)$ $\qquad \cos(xy) = 0$

$\iff xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\forall\, k \in \mathbb{Z}$



$k=0$

$xy = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}$

es. $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2)$

Trovare i p.ti critici.

$f_x = 2x - 2 = 0 \qquad x = 1$

$f_y = 2y = 0 \qquad y = 0$

$$f_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = 0 \qquad t = 0$$

$$(1, 0, 0)$$

$n = 1$ Formula di Taylor al 2° ordine

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left(|x - x_0|^2\right) \quad x \to x_0$$

se x_0 è un p.to critico $(f'(x_0) = 0)$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\Rightarrow\ >0} + o(|x-x_0|^2) \quad x \to x_0$$

se $f''(x_0) > 0$

quindi $f(x) \geq f(x_0)$ in un intorno di x_0

$\Rightarrow$ x_0 p.to di minimo locale

Formula di Taylor

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot D^2 f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) +$$

$$+ o(|x - x_0|^2)$$

$$x \to x_0$$

se $\underline{x}_0$ è critico $\Rightarrow \nabla f(\underline{x}_0)$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}_0) D^2 f(\underline{x}_0) (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\cdot\cdot)$$

quindi dobbiamo studiare il segno di δ

cioè studiare la matrice Hessiana

$$D^2_f(\underline{X}_0) = \underbrace{H_f}(\underline{X}_0)$$

$\hookrightarrow$ notazione del BPS.

<u>Classificazione delle matrici</u>

1) Matrici 2×2

$$f(x,y) \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$\exists\ \lambda_1$ e λ_2 autovalori di M

$\left(\text{se } \exists\ \underline{x} \neq 0 : \ M\underline{x} = \lambda \underline{x} \right)$

<u>**Def.**</u> (Teo. 3.18 BPS)

M è definita positiva $(M > 0)$ $\iff$ 1) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

o equiv.

2) $\det M > 0$

$a > 0$

M è definita negativa $(M < 0)$ $\iff$ 1) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

o equiv.

2) $\det M > 0$

e

$a < 0$

M semidefinita positiva $(M \geq 0)$ $\Longleftrightarrow$

1) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e uno dei due è zero

o equiv.

2) $\det M = 0$

e

$a \geq 0$ e

$c \geq 0$

M semidefinite negative $(M \leq 0)$ $\Longleftrightarrow$

1) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$

e uno dei due è zero

o equiv.

2) $\det M = 0$ e $a \leq 0$ e $c \leq 0$

M <u>indefinita</u> $\Leftrightarrow$ 1) gli autovalori hanno segno opposto

o equiv.

2) $\det M < 0$

<u>Es.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = 2 - 9 = -7$

Indefinita

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 3 - 1 = 2$

$a = 3 > 0$ $A > 0$

A def positiva

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 6 - 1 = 5 > 0$

$a = -2 < 0$

A def negative $(A < 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 0$

A semidefinite positive

$\det A = 0$

$a = 2 > 0$

$c = 0 \geq 0$

$\Rightarrow$

Teorema (3.22 p.165 BPS)

$f \in C^2(A)$, $\underline{x}_0$ p.to critico per f.

Considero $H_f(\underline{x}_0)$, l'Hessiana di f in x_0

se

1) $H_f(\underline{x}_0)$ è def. positiva $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di minimo locale forte

2) $H_f(\underline{x}_0)$ è def. negativa $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di massimo locale forte

3) $H_f(\underline{x}_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di sella

4) $H_f(x_0)$ è semidefinita (positiva o negativa) $\Rightarrow$ non si può dire nulla

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = 2y = 0$$

$(0,0)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$ def. positiva

$\Rightarrow$ $(0,0)$ p.to di minimo