Canale 2, 3 Ottobre

chiave MOODLE C2A2

maiuscole

Formule di derivazione di una <u>funzione composta</u>.

$$h(x,y) = \operatorname{sen}(xy) = g\left(f(x,y)\right)$$

$$h_x = \cos(xy)\cdot y$$
$$h_y = \cos(xy)\cdot x$$

$$g(t) = \operatorname{sen} t$$
$$f(x,y) = xy$$

$$h_x = g'(f(x,y))\cdot f_x$$
$$h_y = g'(f(x,y))\cdot f_y$$

<u>In generale</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(\underline{x})$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(\underline{x}) = g(f(\underline{x})) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x}) = g'\left(f(\underline{x})\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})}$$

<u>es.</u> $h(x,y,z) = \left(x \log(yz)\right)^2$

$$h_x = 2\left(x \log(yz)\right) \log(yz)$$

$$h_y = 2\left(x \log(yz)\right) \cdot x \frac{1}{yz} \cdot z$$

$$h_z = 2\left(x \log(yz)\right) \cdot x \frac{1}{yz} \cdot y$$

$$\underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

Estremi liberi di una funzione

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ trovare $\max f$
$\min f$

Def. $\underline{x}_0 \in A$

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>massimo assoluto</u> per f in A se
$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$, $\forall \underline{x} \in A$ $\qquad f(\underline{x}_0)$ <u>massimo assoluto</u>

- " " " <u>minimo</u> " " " "
$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$, $\forall \underline{x} \in A$. $\qquad f(\underline{x}_0)$ <u>minimo assoluto</u>

- $\underline{x}_0$ p.to di <u>massimo locale</u> (relativo) per f se $\exists$ un intorno U di x_0 t.c.

$$f(\underline{x}) \le f(\underline{x}_0), \quad \forall \underline{x} \in U$$

$f(x_0)$ è il massimo relativo.

(<u>forte</u> se $f(\underline{x}) < f(\underline{x}_0)$)

- " " " <u>minimo locale</u> (") "

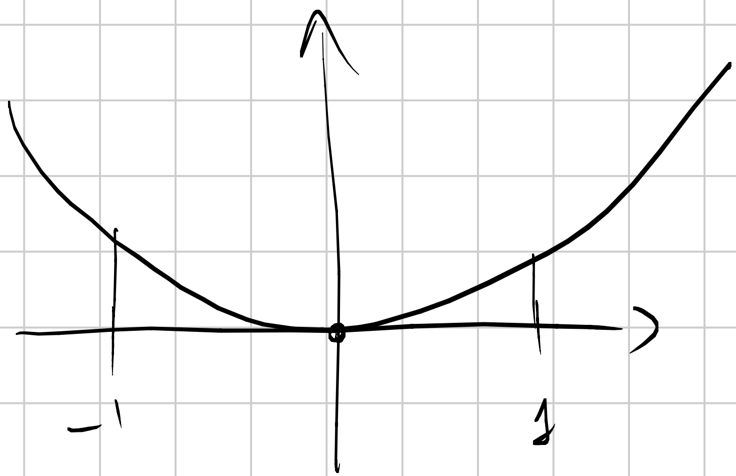
" " " " "

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0), \quad " \quad " \quad "$$

in tutti questi casi parleremo di
estremi (globali o locali) di f

estremi liberi : se sono assunti in
p.ti interni del dominio

estremi vincolati : se " " sul
bordo di un insieme



$f(x) = x^2$ $\quad x = 0$
p.to di min. assoluto

estremo libero

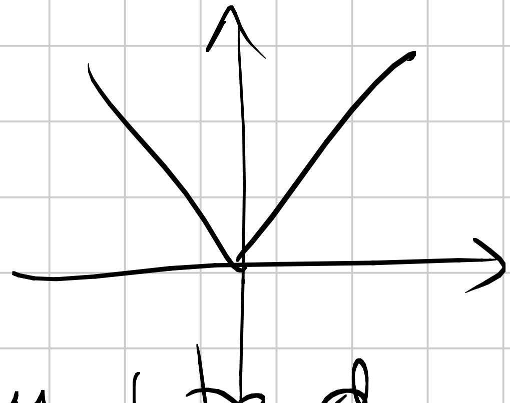
$x = \pm 1$ punti di max assoluto estremi vincolati $x \in [-1, 1]$

Condizione necessaria per gli estremi liberi.

Teorema di Fermat $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A aperto, $\underline{x}_0 \in A$ punto di massimo o minimo locale per f. Se f è derivabile in $\underline{x}_0$ $\Rightarrow \nabla f(\underline{x}_0) = 0$.

<u>es.</u> $n = 1$ $f(x) = |x|$



f non è derivabile in $x = 0$

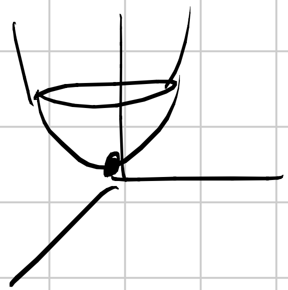
ma in $x = 0$ c'è un p.to di minimo interno.

<u>OSS.</u> Se $\nabla f(\underline{x}_0) = 0 \not\Rightarrow \underline{x}_0$ sia estremo per f.

<u>Def.</u> I punti t.c. $\nabla f(\underline{x}) = 0$ si chiamano p.ti <u>critici</u> (<u>stazionari</u>)

- $\underline{x}_0$ è un estremo locale e f è derivabile in $\underline{x}_0$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un p.to critico

- $\underline{x}_0$ è p.to critico $\not\Rightarrow$ x_0 è un estremo.



es. $f(x,y) = x^2 + y^2$

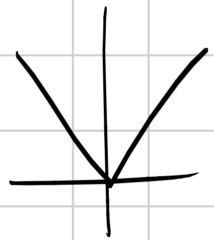
$f \geq 0 \quad f(0,0) = 0$

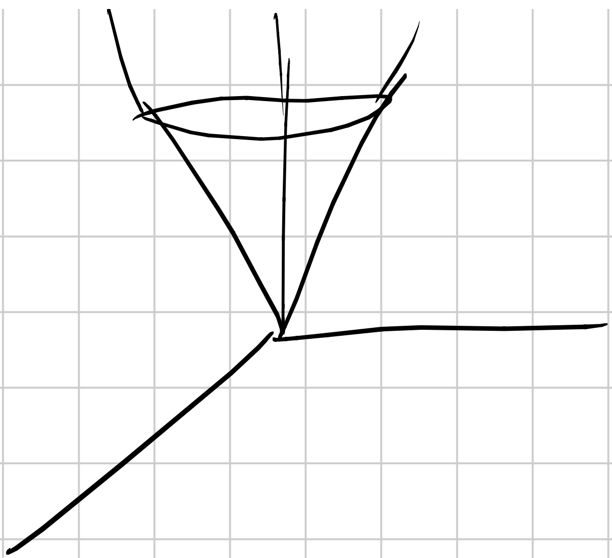
$(0,0)$ p.to di minimo assoluto

$f_x = 2x$
$f_y = 2y$

$x = 0$
$y = 0$

$f_x = 0$
$f_y = 0$

es.  $n=1$



$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$(0,0)$ p.to di minimo assoluto

ma f **non** è derivabile in $(0,0)$ $\Rightarrow$ non vale Fermat.

---

oss. $\underline{x}_0$ p.to critico $\not\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ estremo

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = -2y = 0$$
$\Rightarrow (0,0)$ unico p.to critico

$$f(0,0) = 0$$

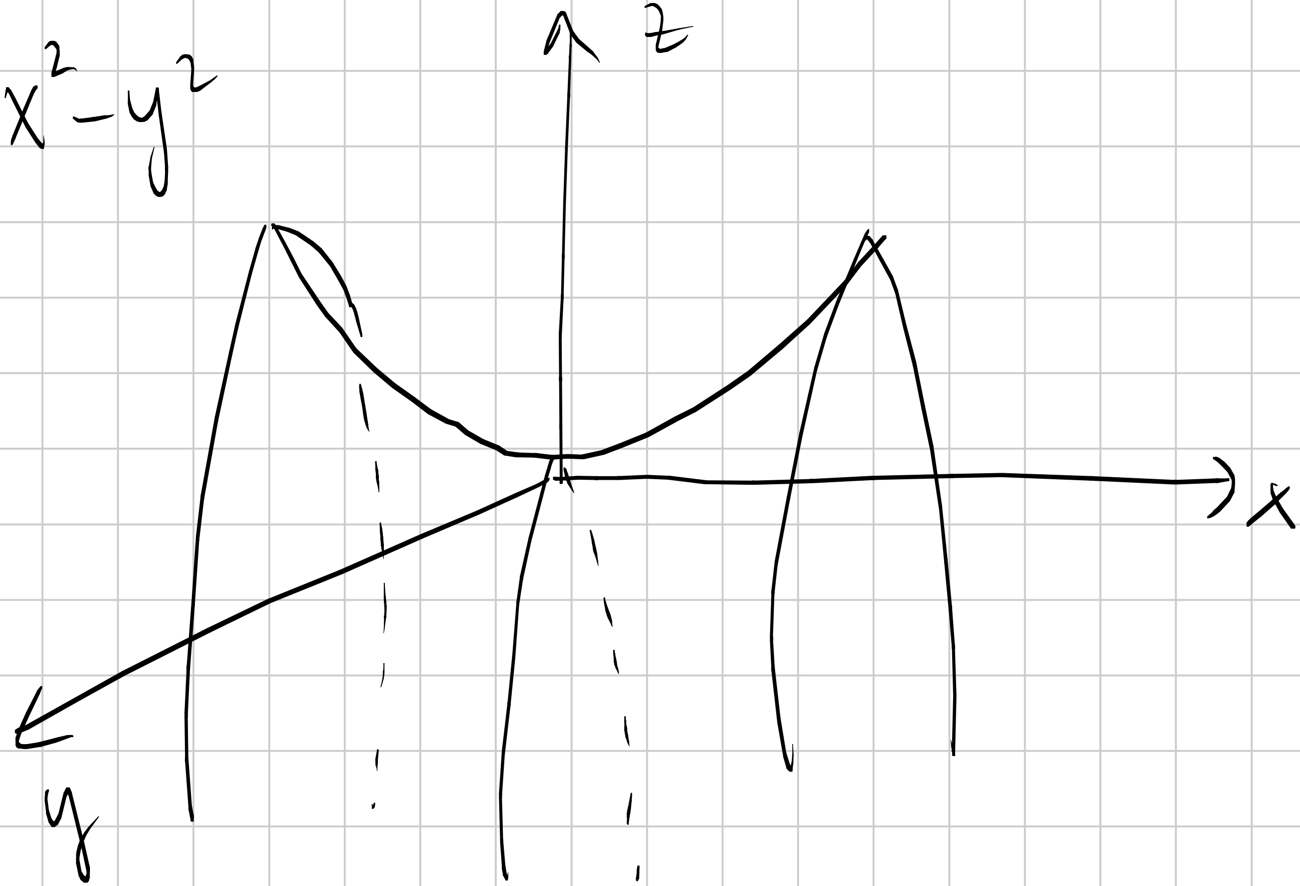
$f(x,y) = x^2 - y^2$

$y=0 \quad f(x,y) = x^2$

$x=0 \quad f(x,y) = -y^2$

$\nexists$ un intorno di $(0,0)$ in cui $f \geq 0$ o $f \leq 0$ in quell'intorno.

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$



$y=0$

$f(x,y) = x^2$

$x=0$

$f(x,y) = -y^2$

$(0,0)$ è un p.to di <u>sella</u>

<u>Def.</u> x_0 è p.to di <u>sella</u> se è un

p.to critico di f e $\nexists$ nessun intorno di $\underline{x}_0$ nel quale $\underline{x}_0$ è p.to di massimo o di minimo.

Es. Trovare i p.ti critici di

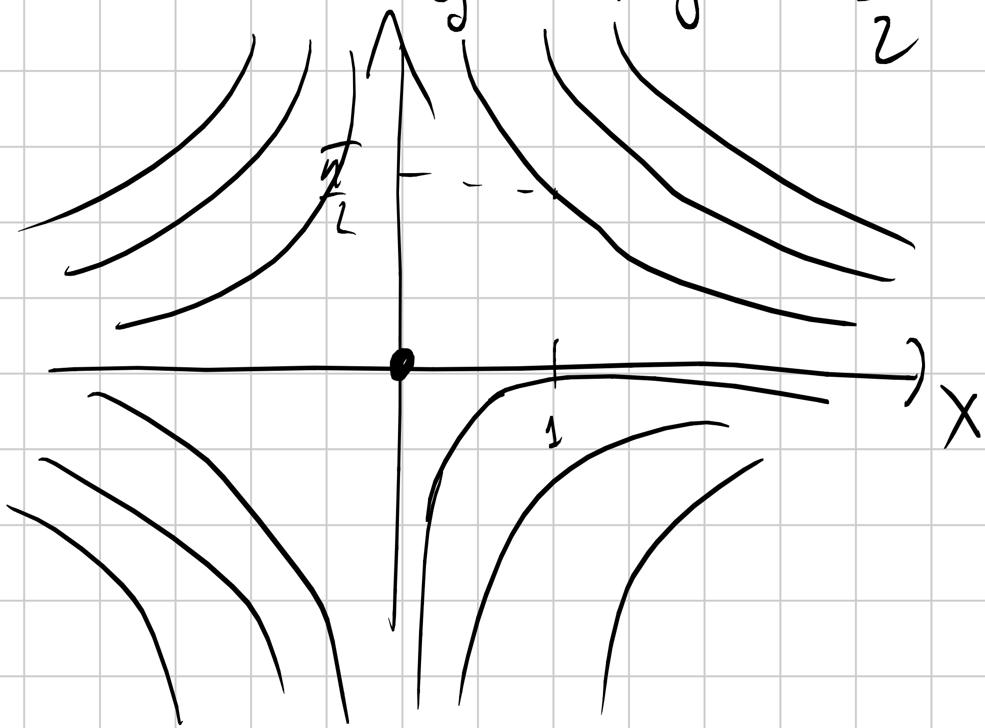
$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$$

$$\begin{cases} f_x = \cos(xy)\cdot y = 0 \\ f_y = \cos(xy)\cdot x = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ p.to critico

$$\cos(xy) = 0 \iff xy = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \quad xy = \frac{\pi}{2} \qquad y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}$



es. I punti critici di

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2)$$

$f_x = 2x - 2 = 0$ $x = 1$

$f_y = 2y = 0$ $y = 0$

$f_z = \frac{1}{1+z^2} \cdot 2z = 0$ $z = 0$

$(1, 0, 0)$ unico punto critico di f

es. Trovare punti critici di   (Percorso).

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + y^2$$

$(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, -2/3)$ $(\pm 1, -\frac{2}{3})$

Come si fa a capire se un punto critico è estremo o no?

$n=1$ Sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$ di 2° ordine

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2) \quad x \to x_0$$

se x_0 è critico $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\geq 0} + o(|x-x_0|^2) \quad x \to x_0$$

se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \geq 0$

$f(x) \geq f(x_0)$ in un intorno di x_0

cioè x_0 è un pto di minimo relativo

Analog. se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ pto di max relativo

— · —

Formula di Taylor

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot D^2_f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) +$$
$$+ o(|x - x_0|^2)$$
$$x \to x_0$$

Matrice Hessiana di f ($H_f(\underline{x}_0)$ BPS)

Classificare la Hessiana

1 caso

$f(x,y)$

f_x

f_y

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2

Def. (Teo. 3.18 BPS)

- M è definita positiva ($M > 0$) se
  1) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

  o equivalent.

  2) $\det M > 0$ e $a > 0$

- M è definita negativa ($M < 0$) se
  1) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

  o equivalent.

  2) $\det M > 0$ $a < 0$

- M è <u>semidefinita positiva</u> $(M \geq 0)$ se

1) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e almeno uno è zero

o equiv.

2) $\det M = 0$ e $a \geq 0$ e $c \geq 0$

- M è <u>semidefinita negativa</u> $(M \leq 0)$ se

1) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ e almeno uno è zero.

2) $\det M = 0$ e $a \leq 0$ e $c \leq 0$

- M è <u>indefinita</u> se 1) λ_1, λ_2 hanno segni opposti

2) $\det M < 0$

<u>Esempi</u>

- $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det M = ac - b^2 =$
$= 3 - 1 = 2 > 0$

$a = 3 > 0$ $\Rightarrow$ M è def. positiva.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det M = 2 - 9 = -7 < 0$

M è <u>indefinita</u>

- $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\det M = 6 - 1 = 5 > 0$

  $a = -2 < 0$

  M è def. negativa

- $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$

  $\lambda_2 = 0$

  semidefinita positiva

  $\det M = 0$ $a \geq 0$

  $c = 0$

-

__Teorema__ (3.22 p165 BPS)

$f \in C^2(A)$, $\underline{x}_0$ p.to critico per f

Considero $H_f(\underline{x}_0)$ (l'Hessiana di f in $\underline{x}_0$)

1) se $H_f(\underline{x}_0)$ è __def. positiva__ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di __minimo__ locale forte

2) se $H_f(\underline{x}_0)$ è __def. negativa__ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di __massimo__ locale forte

3) se $H_f(\underline{x}_0)$ è __indefinita__ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ p.to di

sella

4) se $H_f(\underline{x}_0)$ è semidefinita (positiva o negativa) $\Rightarrow$ non si può dire nulla

Es. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f_x = 2x = 0$

$f_y = 2y = 0$ $\Rightarrow (0,0)$ p.to critico

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ def. positiva

$\Rightarrow (0,0)$ p.to di minimo

<u>Es.</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x = 0$ $(0,0)$

$f_y = -2y = 0$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{\text{indefinita}} \Rightarrow (0,0) \text{ è } \underline{\underline{\text{sella}}}$$