Università degli Studi di Padova
Facoltà di Ingegneria

Esercizi e complementi di Analisi I

di Andrea Centomo

Anno Accademico 2009-2010

Prefazione

In queste pagine sono raccolti un certo numero di esercizi di Analisi 1 e qualche complemento da me svolto nel tempo nei corsi di laurea in Ingegneria dell'Università di Padova. La speranza è che quanto contenuto in queste pagine possa contribuire alla formazione degli studenti in un campo fondamentale come l'Analisi.
Un ringraziamento particolare a Roberto Monti, per i numerosi consigli e suggerimenti durante la redazione del nucleo fondamentale di questo eserciziario.
Un ringraziamento a Paola Mannucci per la parte teorica relativa agli integrali generalizzati.

Per segnalare eventuali errori potete scrivere a `centomoa@yahoo.it`.

Vicenza, 17 agosto 2009 Andrea Centomo

1 Numeri reali

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione ha una struttura algebrica di **corpo commutativo**. Molte delle proprietà che usiamo in modo disinvolto nel calcolo con i numeri razionali dipendono in realtà dalla struttura algebrica di $\mathbb{Q}$. Per citare un esempio importante vediamo la *legge di annullamento del prodotto* che afferma che *il prodotto di due numeri razionali è zero se e solo se uno dei due fattori (eventualmente entrambi) è zero.*

Proposizione 1 *Sia x un numero razionale allora $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.*

Dimostrazione. Poiché $0 = 0 + 0$, si ha $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$. Per la proprietà distributiva si ha anche $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Aggiungendo membro a membro $-0 \cdot x$ si ha ha la tesi. $\square$

Questo particolare comportamento dello 0 rispetto alla moltiplicazione implica che 0 non ammette inverso. Ma la presenza di reciproco per ogni numero diverso da 0 implica che:

Proposizione 2 *Siano x e y due numeri razionali e $xy = 0$ allora o $x = 0$ o $y = 0$ (le due cose potendo essere vere entrambe).*

Dimostrazione. Se $xy = 0$ e, ad esempio $x \neq 0$, moltiplicando membro a membro per il reciproco di x si ha $y = 0$. Il resto della dimostrazione è semplice. $\square$

In $\mathbb{Q}$ si introduce il ben noto ordinamento $\leq$ e in tal modo la struttura algebrica di corpo commutativo si arricchisce divenendo una struttura di *corpo commutativo totalmente ordinato.*

Nell'insieme dei numeri razionali problemi semplici come ad esempio la determinazione di un numero che elevato al quadrato dia per risultato 2 non hanno soluzione. Per ovviare a questa situazione e per altre ragioni, già nella scuola secondaria, si è sentita la necessità di ampliare il corpo dei numeri razionali passando al corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$. La costruzione di $\mathbb{R}$ partendo da $\mathbb{Q}$ si può condurre in modi diversi (sezioni di Dedekind, successioni di Cauchy, semirette razionali, allineamenti decimali) tuttavia quello che preme sottolineare è che $\mathbb{R}$, oltre ad ereditare dai razionali la struttura di corpo commutativo totalmente ordinato, è anche *completo.*

Teorema 1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A è limitato superiormente (inferiormente) allora ammette estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$.*

Dalla completezza si può dedurre l'esistenza della potenza ad esponente razionale, della potenza ad esponente reale e del logaritmo. Per mostrare il tipo di ragionamento che si usa dimostriamo rigorosamente la seguente.

Proposizione 3 *Sia $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$. Allora esiste unico il numero reale $\sqrt{x} \geq 0$ tale che*

$$\sqrt{x}^2 = x.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di numeri reali

$$A = \{s \in [0, +\infty) \colon s^2 \leq x\}.$$

L'insieme A non è vuoto ($0 \in A$) e ora dimostriamo che è anche limitato superiormente. Infatti, se $s > 1$ si ha

$$s < s^2 \leq x$$

da cui si deduce che un maggiorante di A o è 1 o è x. Per la completezza di $\mathbb{R}$ si ha che A ammette estremo superiore che indichiamo con $\sqrt{x}$. Per concludere la dimostrazione resta da vedere che effettivamente

$$\sqrt{x}^2 = x.$$

Se, per assurdo, fosse

$$\sqrt{x}^2 < x$$

vediamo che esiste $h > 0$ tale che $(\sqrt{x} + h)^2 < x$ e ciò contraddice il fatto che $\sqrt{x}$ sia estremo superiore. Una scelta per h opportuna si ottiene come segue

$$(\sqrt{x} + h)^2 = \sqrt{x}^2 + 2h\sqrt{x} + h^2 < x$$

da cui

$$h < \frac{x - \sqrt{x}^2}{2\sqrt{x} + h}$$

e

$$h = \frac{x - \sqrt{x}^2}{3\sqrt{x}}.$$

La verifica che h è adeguato si lascia per esercizio. □

1.1 Esercizi

Esercizio 1 *Rappresentare nel piano le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4 \leq 0 \\ 2y - x + 4 > 0 \end{cases}$$

Soluzione. Iniziamo risolvendo separatamente le due disequazioni che formano il sistema.

Prima disequazione. La prima delle due disequazioni

$$x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4 \leq 0 \tag{1}$$

può essere riscritta nella forma più espressiva

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 1$$

L'insieme $\mathcal{C}$ dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

è come noto una circonferenza di centro $C = (1, -2)$ e raggio unitario. L'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano la (1) è allora rappresentato dai punti del *cerchio* che ha per frontiera $\mathcal{C}$ (inclusi i punti di $\mathcal{C}$).

Seconda disequazione. La seconda disequazione si riconduce immediatamente a

$$y > \frac{1}{2}x - 2. \tag{2}$$

L'insieme dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

è una retta r passante per il punto $A = (0, -2)$ e di coefficiente angolare $1/2$. Osserviamo che r interseca $\mathcal{C}$ e che i punti di intersezione hanno come coordinate le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4 = 0 \\ 2y - x + 4 = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione risultano A e $B = (8/5, -6/5)$. A questo punto possiamo rappresentare nel piano la retta r ed osservare che i punti che soddisfano la disequazione (2) sono i punti appartenenti al semipiano "superiore" tra i due in cui la retta r divide il piano (esclusi i punti di r).

Per concludere l'esercizio ricordiamo che cosa si intende per soluzione di un sistema di disequazioni. Una coppia di numeri reali è una soluzione del sistema se e solo se è soluzione di entrambe le disequazioni. Dovrebbe allora essere chiaro che i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema di partenza sono i punti di intersezione tra semipiano e cerchio. Si lascia al lettore il disegno del grafico.

Esercizio 2 *Dato l'insieme di numeri reali*

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$$

verificare che min $\mathcal{A} = 1$ *e che sup* $\mathcal{A} = 2$.

Soluzione. Possiamo suddividere la soluzione in due parti.

A. Verifichiamo che $\min \mathcal{A} = 1$:

1. il numero reale 1 è un minorante di $\mathcal{A}$ ossia per ogni $x \in \mathcal{A}$ è $x \geq 1$. Infatti, osservato che per $n \geq 2$, si ha

$$\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2} > 0$$

avremo

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} \geq 2\sqrt{2}$$

da cui, elevando membro a membro al quadrato, anche

$$n^2 + 2n - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 9$$

che è sicuramente verificata per $n \geq 2$.

2. $1 \in \mathcal{A}$. Infatti se $n = 2$ $x = 1$.

B. La verifica che $\sup \mathcal{A} = 2$ è più delicata e può essere svolta come segue:

1. il numero reale 2 è un maggiorante di $\mathcal{A}$ ossia, per ogni $x \in \mathcal{A}$ si ha che $x < 2$. Infatti

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} > \sqrt{2}$$

da cui, elevando al quadrato membro a membro, si ha

$$n^2 + 2n - 2 > 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 > 3$$

che è sicuramente verificata per $n \geq 2$.

2. per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x \in \mathcal{A}$ e $x > 2 - \epsilon$. Infatti

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2}} > 2 - \epsilon \Leftrightarrow (\epsilon^{-1} + 1)\sqrt{2} < \sqrt{n^2 + 2n}$$

da cui, elevando al quadrato membro a membro, si ha

$$n^2 + 2n - 2(\epsilon^{-1} + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow n > -1 + \sqrt{1 + 2(\epsilon^{-1} + 1)^2}.$$

L'ultima disuguaglianza è verificata per infiniti valori di $n \geq 2$ in quanto $\mathbb{R}$ è un corpo *archimedeo.*

Esercizio 3 *Trovare estremo inferiore e superiore del seguente insieme*

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x = \frac{1}{3^{n^2 - 3n + 1}}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

indicando in quali casi essi sono minimo e massimo. Giustificare adeguatamente la risposta.

Soluzione. Iniziamo osservando che l'insieme $\mathcal{B}$ si può riscrivere nella forma

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x = 3^{-n^2+3n-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Se ricordiamo che la funzione $y = -x^2 + 3x - 1$ ha per grafico una parabola di vertice $V = (3/2, 5/4)$ non è difficile rappresentare l'andamento dell'esponente, vedi Figura 1.1, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che in corrispondenza

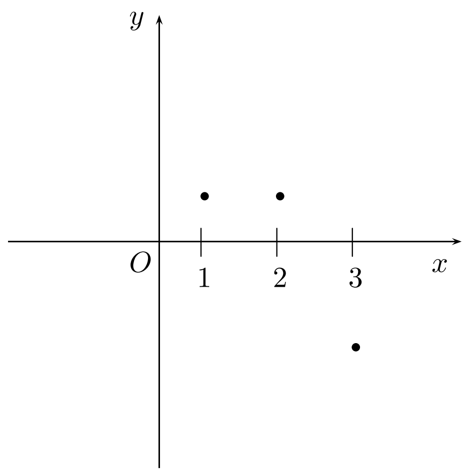

Figura 1: andamento dell'esponente

dei valori $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$ l'esponente assume il valore massimo 1 mentre, al crescere di $n > 2$, l'esponente decresce. Se ora ricordiamo che la funzione esponenziale di base 3 è strettamente crescente si può intuire che

$$\inf \mathcal{B} = 0 \qquad \max \mathcal{B} = 3^1 = 3$$

Verifichiamo ora rigorosamente che quanto intuito è corretto.

- $\max \mathcal{B} = 3$: osservato che $3 \in \mathcal{B}$ dobbiamo solo verificare che 3 è un maggiorante di $\mathcal{B}$ ossia che per ogni $x \in \mathcal{B}$ si ha

$$x \leq 3 \Leftrightarrow 3^{-n^2+3n-1} \leq 3 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \geq 0$$

  che è verificata per $n \geq 2$..

- $\inf \mathcal{B} = 0$:

  1. 0 è un minorante di $\mathcal{B}$ ossia, per ogni $x \in \mathcal{B}$, si ha $x > 0$. Ciò è evidente visto che si ha a che fare con una funzione esponenziale;

2. per ogni $\epsilon > 0$ esiste almeno un $x \in \mathcal{B}$ tale che $x < \epsilon$. Risolviamo la disequazione
$$3^{-n^2+3n-1} < \epsilon$$
discutendo quello che accade al variare di ϵ. Ora la disequazione precedente è equivalente a
$$n^2 - 3n + 1 + \log_3 \epsilon > 0$$
il cui discriminante è
$$\Delta = 5 - 4\log_3 \epsilon$$
Distingueremo allora due casi:
   (a) $\Delta < 0$ ossia $\epsilon > 3^{5/4}$ nel qual caso la disequazione è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\Delta \geq 0$ ossia $0 < \epsilon \leq 3^{5/4}$ nel qual caso avremo in particolare che
   $$n > \frac{3 + \sqrt{5 - 4\log_3 \epsilon}}{2}$$
   che è verificata in virtù dell'*archimedeità* del corpo dei numeri reali.

2 Principio di induzione

La formulazione con cui il *principio di induzione* si utilizza nelle applicazioni è la seguente.

> *Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà di cui i numeri naturali possono o meno godere. Se $\mathcal{P}(n_0)$ è vera e se l'implicazione $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ è vera per ogni $n \geq n_0$ allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.*

Il lettore interessato ad approfondire il principio di induzione è rinviato alla bibliografia [1].

2.1 Esercizi

Esercizio 4 *Ricorrendo al principio di induzione dimostrare che:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

per $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Ricordiamo innanzitutto che:

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e che quindi possiamo riscrivere l'uguaglianza nella forma equivalente

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ora procediamo alla dimostrazione per induzione:

1. nel caso $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente verificata.

2. assumiamo ora, per ipotesi induttiva, che sia vero che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

   aggiungendo membro a membro $(n+1)^3$ si ha

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

   Notiamo allora come partendo dall'ipotesi induttiva siamo riusciti a mostrare che l'uguaglianza è vera anche per $n + 1$.

Dai due fatti precedenti, in base al principio di induzione, possiamo dedurre che l'uguaglianza di partenza è vera per ogni numero naturale.

Esercizio 5 *Ricorrendo al principio di induzione dimostrare che:*

$$\frac{1}{1-mx} \geq (1+x)^m \tag{3}$$

per $m \in \mathbb{N}$ *e per* $x \in \mathbb{R}$, $-1 < x < \frac{1}{m}$.

1. nel caso $n = 1$, osservato che $x < 1/m \leq 1$, si ha

$$\frac{1}{1-x} \geq (1+x) \Leftrightarrow 0 \geq -x^2$$

   e l'ultima disequazione è sempre verificata;

2. assumiamo ora, per ipotesi induttiva, che sia vero che

$$\frac{1}{1-mx} \geq (1+x)^m$$

   e moltiplichiamo membro a membro per $1 + x$ (fatto lecito visto che lavoriamo per $x > -1$).

$$\frac{1+x}{1-mx} \geq (1+x)^{m+1}$$

   Non è difficile verificare che

$$\frac{1}{1-(m+1)x} \geq \frac{1+x}{1-mx}$$

   Infatti se $-1 < x < 1/(m+1)$ si ha

$$1 - mx \geq (1+x)(1-(m+1)x)$$

   da cui a conti fatti

$$0 \geq -x^2(m+1)$$

   che è sempre verificata. Allora in particolare, per la proprietà transitiva dell'ordine, si ha anche

$$\frac{1}{1-(m+1)x} \geq (1+x)^{m+1}$$

   Notiamo come partendo dall'ipotesi induttiva siamo riusciti a mostrare che la disuguaglianza (3) è vera anche per $n + 1$.

Dai fatti precedenti, in base al principio di induzione, possiamo dedurre che (3) è vera per ogni numero naturale.

Esercizio 6 *Dimostrare per induzione che dati* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Se $n = 1$ è banale osservare che

$$(a+b) = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$$

Inoltre osserviamo che

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$$

da cui, per ipotesi induttiva, anche

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}.$$

Ora

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k = \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}a^{n-j}b^{j+1}$$

dove si è posto $j = k - 1$. Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \binom{n}{n}b^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}a^{n-j}b^{j+1}.$$

dove si è posto $j = k$. Osserviamo che

$$\binom{n}{j+1} + \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j-1)!(j+1)!} + \frac{n!}{(n-j)!j!} = \binom{n+1}{j+1}$$

da cui posto $i = j + 1$ anche

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^{n-i+1}b^i + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Osservato che $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ e che $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ si conclude che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{n-i+1}b^i.$$

3 Esercizi su limiti

Esercizio 7 *Verificare, ricorrendo alla definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}+x = -\frac{1}{2}.$$

(Suggerimento: accompagnare la discussione con rappresentazioni grafiche).

Soluzione. Prima di intraprendere la verifica del limite osserviamo che la funzione di cui si è calcolato il limite ha come dominio D l'insieme dei valori per i quali è soddisfatta la disequazione

$$x^2+x \geq 0$$

ossia $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. Osserviamo inoltre che $f(-1) = -1$.

La verifica del limite consiste nel provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che se $x < -M$ allora

$$\left|\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

che possiamo esplicitare nella forma

$$-\epsilon < \sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2} < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon-\frac{1}{2} < \sqrt{x^2+x}+x < \epsilon-\frac{1}{2}$$

A questo punto sono necessarie alcune osservazioni

1. la verifica del limite avviene restringendo la funzione al sottoinsieme del dominio $D^* = D \cap \mathbb{R}^- = (-\infty, -1]$ ossia, in termini più semplici, lavorando per $x \leq -1$;

2. in D^* la funzione è *monotona strettamente decrescente*. Infatti è composizione di funzioni monotone strettamente decrescenti in D^*;

3. in D^* la funzione è *limitata superiormente*. Infatti per $x \leq -1$ si ha

   $$\sqrt{x^2+x}+x < -\frac{1}{2}$$

   infatti, per tali valori di x, si ha

   $$\sqrt{x^2+x} < -x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+x < x^2+x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4}.$$

Dall'ultima osservazione discende che la verifica del limite si riconduce allo studio della disequazione

$$-\epsilon-\frac{1}{2} < \sqrt{x^2+x}+x$$

Possiamo distinguere quindi due casi:

a) $\epsilon > 1/2$: in questo caso per quanto osservato in 2. possiamo scegliere $M = 1$.

b) $0 < \epsilon \leq 1/2$ nel qual caso la disequazione precedente si riconduce a

$$-\alpha - x < \sqrt{x^2 + x}$$

dove si è posto $\alpha = \epsilon + \frac{1}{2}$. Possiamo risolvere la disequazione passando alla disequazione equivalente ottenuta elevando al quadrato membro a membro (ciascun membro è non negativo)

$$(\alpha + x)^2 < x^2 + x \Leftrightarrow x < -\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$$

da cui $M = \alpha^2/(2\alpha - 1)$.

Esercizio 8 *Calcolare il limite*

$$L = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$$

Soluzione. Il limite si presenta inizialmente come una forma indeterminata del tipo $[\infty - \infty]$. Per sciogliere la forma indeterminata possiamo in primo luogo ricorrere al seguente artificio:

$$L = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

Utilizzando, tra le altre cose le proprietà dei radicali, possiamo riscrivere l'ultimo limite nella forma

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x}.$$

Dal momento che stiamo calcolando il limite per $x \to -\infty$ possiamo porre $|x| = -x$ e quindi il limite diviene

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = -1/2.$$

Esercizio 9 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3x)^x + \arctan(3^x)}{x^2 + 2^{x \log x}}.$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\infty/\infty]$. Per poterne calcolare il valore analizziamo separatamente numeratore e denominatore.

1. **Numeratore**. Il numeratore si presenta come una somma di due funzioni: la prima è un infinito per $x \to +\infty$ mentre la seconda è limitata
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(3^x) \leq +\frac{\pi}{2}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. **Denominatore.** Il denominatore si presenta come una somma di due funzioni che sono entrambe infinite per $x \to +\infty$. Per confrontare questi infiniti osserviamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^{x\log x}} = 0$$
Ciò segue direttamente dalle disuguaglianze
$$0 < \frac{x^2}{2^{x\log x}} = \frac{e^{2\log x}}{2^{x\log x}} < 2^{(4-x)\log x}$$
e dal teorema del confronto.

In conclusione raccogliendo a numeratore e a denominatore gli infiniti maggiormente rilevanti possiamo riscrivere il limite nella forma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x)^x + \arctan(3^x)}{x^2 + 2^{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x)^x}{2^{x\log x}} \frac{1 + \frac{\arctan(3^x)}{(3x)^x}}{1 + \frac{x^2}{2^{x\log x}}}$$

Per concludere l'esercizio calcoliamo il limite del primo fattore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x)^x}{2^{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log 3x}}{2^{x\log x}} = +\infty$$

in quanto
$$0 < 2^{x\log 3} < \frac{e^{x\log 3x}}{2^{x\log x}}$$
e $2^{x\log 3}$ è un infinito per $x \to +\infty$.

Esercizio 10 *Calcolare il limite*

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{\sin x}{x^3}}.$$

Soluzione Il limite si presenta inizialmente come una forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$. Queste forme indeterminate si possono trattare riscrivendo il limite nella forma

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin x}{x^3}\log\cos x} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin x}{x}\frac{\log\cos x}{x^2}}$$

Per concludere l'esercizio osserviamo che vale il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

da cui segue che $L = e^{\frac{1}{2}\cdot 1} = e^{\frac{1}{2}}$. Entrambi i limiti sarebbero facilmente calcolabili con la regola dell'Hospital tuttavia, per esercizio, calcoliamo il secondo riconducendolo ad un importante limite notevole. Iniziamo osservando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \log[1 + (\cos x - 1)]^{\frac{\cos x - 1}{x^2}\frac{1}{\cos x - 1}}.$$

Non è difficile vedere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \log\Big[1 + (\cos x - 1)\Big]^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim_{z\to +\infty} \log\left[1 - \frac{1}{z}\right]^{-z} = \log e = 1.$$

dove si è operata la sostituzione $z = 1 - \cos x$.

Esercizio 11 *Verificare che non esiste né finito né infinito il seguente limite:*

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x\sin x} - x$$

Soluzione. Ricorrendo all'artificio visto nell'Esercizio 2 il limite si può riscrivere nella forma più significativa

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2}x\sin x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x\sin x} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{2\Big(\sqrt{1 + \frac{\sin x}{2x}} + 1\Big)}$$

1. Il limite non può essere finito. Infatti se

   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{2\Big(\sqrt{1 + \frac{\sin x}{2x}} + 1\Big)} = L$$

   con $L \in \mathbb{R}$, si avrebbe

   $$\lim_{x\to +\infty} \sin x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{2\Big(\sqrt{1 + \frac{\sin x}{2x}} + 1\Big)} 2\left(\sqrt{1 + \frac{\sin x}{2x}} + 1\right) = 4L$$

   il che è assurdo in quanto il primo limite, come noto, non esiste.

2. Il limite non può essere infinito per un ragionamento del tutto analogo.

Esercizio 12 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log x + \sinh x^2}{\sin x + 2(\cos x^{1/2} - 1)e^x}$$

Soluzione. Iniziamo osservando che il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo [0/0].

1. **Numeratore.** Per confrontare gli infinitesimi al numeratore calcoliamo il limite del rapporto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^2}{x^2\log x}.$$

Ricordando che nel limite $x \to 0^+$ si ha $\sinh x^2 = x^2 + o(x^2)$ possiamo riscrivere il limite precedente nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + o(1)}{\log x} = 0$$

con $o(1)$ infinitesimo per $x \to 0^+$; da cui possiamo concludere che

$$x^2\log x + \sinh x^2 = x^2\log x + o(x^2\log x).$$

2. **Denominatore.** Per studiare il comportamento del denominatore procediamo sostituendo le diverse funzioni trascendenti con il loro polinomio di Mac Laurin. Ricordiamo, prima di iniziare a sviluppare i calcoli, che nel limite $x \to 0$ valgono i seguenti sviluppi asintotici:

- $\sin x = x + o(x^2)$
- $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + o(x^{5/2})$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Osserviamo che gli sviluppi di funzioni pari (dispari) non contengono termini di grado dispari (pari). Conseguentemente, se prendiamo ad esempio lo sviluppo asintotico della funzione seno - funzione dispari - al termine di primo grado non segue $o(x)$ ma più precisamente $o(x^2)$! A questo punto sostituendo gli sviluppi osserviamo che:

$$2(\cos x^{1/2} - 1)e^x = 2\Big[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^{5/2})\Big]\Big[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big] =$$

$$= -x - \frac{11}{12}x^2 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(1)\Big(2x^{5/2} - x^3 + 2x^{7/2} + \frac{1}{12}x^4 + 3x^{9/2}\Big)$$

con $o(1)$ infinitesimo per $x \to 0^+$. Possiamo allora scrivere il denominatore del limite iniziale nella forma

$$\sin x + 2(\cos x^{1/2} - 1)e^x = x + o(x^2) + 2(\cos x^{1/2} - 1)e^x = -\frac{11}{12}x^2 + x^2 o(1)$$

dove sono stati trascurati gli infinitesimi non significativi.

Completata l'analisi di numeratore e denominatore possiamo riscrivere il limite di partenza come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x\Big(1+o(1)\Big)}{x^2\Big(-\frac{11}{12}+o(1)\Big)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{-\frac{11}{12}} = +\infty.$$

Esercizio 13 *Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \log(\cosh x^\alpha)}{\sqrt{1+x^4}+\sin x^\alpha}$$

Soluzione. Iniziamo con alcune osservazioni preliminari.

1. **Donominatore.** Il denominatore è costituito dalla somma dell'infinito $\sqrt{1+x^4}$ e della funzione limitata $\sin x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

2. **Numeratore.** Il numeratore è costituito dalla differenza di due infiniti; il secondo dipendente dal valore di α. Per quanto riguarda l'infinito dipendente da α si ha:

$$\log(\cosh x^\alpha) = \log\left(\frac{e^{x^\alpha}+e^{-x^\alpha}}{2}\right) = \log e^{x^\alpha}\frac{1+e^{-2x^\alpha}}{2}$$

$$= \log e^{x^\alpha} + \log\Big(1+e^{-2x^\alpha}\Big) - \log 2 = x^\alpha + \log(1+e^{-2x^\alpha}) - \log 2.$$

Quindi l'argomento del limite di partenza si può scrivere come:

$$\frac{x^3 - \log(\cosh x^\alpha)}{\sqrt{1+x^4}+\sin x^\alpha} = \frac{x^3 - x^\alpha - \log(1+e^{-2x^\alpha}) + \log 2}{x^2(\sqrt{1+1/x^4}+\sin(x^\alpha)/x^2)}.$$

Completata questa analisi possiamo concludere l'esercizio esaminando i seguenti casi:

a) $\alpha = 3$. In questo caso abbiamo una cancellazione. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\log(1+e^{-2x^3})+\log 2}{x^2(\sqrt{1+1/x^4}+\sin(x^3)/x^2)} = 0.$$

b) $\alpha > 3$. Si raccoglie x^α al numeratore, in quanto è l'infinito dominante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-2}\big(-1+x^{3-\alpha}-x^{-\alpha}\log(1+e^{-2x^\alpha})+x^{-\alpha}\log 2\big)}{\sqrt{1+1/x^4}+\sin(x^\alpha)/x^2} = -\infty.$$

Infatti $\alpha - 2 > 1$.

c) $0 \leq \alpha < 3$. In questo caso si raccoglie x^3 al numeratore in quanto è l'infinito dominante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\big(1 - x^{\alpha-3} - x^{-3}\log(1+e^{-2x^\alpha}) + x^{-3}\log 2\big)}{\sqrt{1+1/x^4} + \sin(x^\alpha)/x^2} = +\infty.$$

Esercizio 14 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1 - e^{x^2} + 4\sqrt{x}\log(1+x^\alpha)}{\cos x^3 - 1 + \tan x^\alpha \sin\sqrt{x}}.$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Prima di iniziare a svolgere l'esercizio ricordiamo che, nel limite di $y \to 0$, valgono i seguenti sviluppi di Mac Laurin:

$$e^y = 1 + y + o(y) \qquad \log(1+y) = y + o(y^2)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^3) \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4).$$

Sostituendo gli sviluppi nel limite di partenza avremo:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{-x^2 + o(x^2) + 4x^{\alpha+1/2} + o(x^{\alpha+1/2})}{-\frac{x^6}{6} + o(x^9) + x^{\alpha+1/2} + o(x^{\alpha+1/2})}.$$

Distinguiamo ora diversi casi:

1. $\alpha < 3/2$. In questo caso, raccogliendo $x^{\alpha+1/2}$, avremo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^{\alpha+1/2}}{x^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{-x^{-\alpha+3/2} + o(x^{-\alpha+3/2}) + 4 + o(1)}{-\frac{x^{-\alpha+11/2}}{6} + o(x^{-\alpha+17/2}) + 1 + o(1)} = 4$$

2. $\alpha = 3/2$. In questo caso, raccogliendo x^2, avremo:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{3 + o(1)}{-\frac{x^{7/2}}{6} + o(x^{13/2}) + 1 + o(1)} = 3$$

3. $3/2 < \alpha < 11/2$. In questo caso, sempre raccogliendo, avremo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{-1 + o(1) + 4x^{\alpha-3/2} + o(x^{\alpha-3/2})}{-\frac{x^{-\alpha+11/2}}{6} + o(x^{-\alpha+17/2}) + 1 + o(1)} = -\infty$$

4. $\alpha = 11/2$. In questo caso, sempre raccogliendo, avremo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x^6} \cdot \frac{-1 + o(1) + 4x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6} + o(x^3) + 1 + o(1)} = -\infty$$

5. $\alpha > 11/2$. In questo caso, sempre raccogliendo, avremo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^6} \cdot \frac{-1 + o(1) + 4x^{\alpha-3/2} + o(x^{\alpha-3/2})}{-\frac{1}{6} + o(x^3) + x^{\alpha-11/2} + o(^{\alpha-11/2})} = +\infty$$

Esercizio 15 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{2+7x}{2-x}\right) - \frac{8x}{2-x}}{\sin(3-3x)\big(e^{2x} - 1 - \sin 2x\big)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come forma indeterminata del tipo [0/0]. Ricordato che nel limite $y \to 0$ valgono gli sviluppi

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad\qquad \sin y = y + o(y^2)$$

possiamo riscrivere il denominatore nella forma

$$\sin(3-3x)\big(2x + 2x^2 - 2x + o(x^2)\big) = \sin(3-3x)\big(2x^2 + o(x^2)\big)$$

Sempre nel limite $y \to 0$ si ha

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

da cui, notato che

$$\log\left(\frac{2+7x}{2-x}\right) = \log\left(1 + \frac{8x}{2-x}\right),$$

anche

$$\log\left(1 + \frac{8x}{2-x}\right) - \frac{8x}{2-x} = -\frac{32x^2}{(2-x)^2} + o(x^2).$$

Allora il limite di partenza si riscrive nella forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{32x^2}{(2-x)^2} + o(x^2)}{\sin(3-3x)\big(2x^2 + o(x^2)\big)}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{32}{(2-x)^2} + o(1)}{\sin(3-3x)\big(2 + o(1)\big)} = -\frac{4}{\sin 3}.$$

4 Esercizi sulle funzioni continue

Esercizio 16 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2^{b+1} - x\right) & x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{2}{2x-\pi} - a + \sqrt{2} & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che essa sia continua.

Soluzione.

- La funzione è **definita** su tutto $\mathbb{R}$.
- Per determinare in corrispondenza di quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ c'è continuità possiamo ragionare come segue:
  1. in ogni punto di $D = \mathbb{R} - \{0, \pi/2\}$ la funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue;
  2. *continuità nel punto* 0. Per $x = 0$ la funzione assume il valore

     $$f(0) = \log 2^{b+1} = (b+1)\log 2$$

     e per controllare se vi è continuità procediamo calcolando

     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a \sin x + b \cos x = b$$

     e

     $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \log(2^{b+1} + x) = (b+1)\log 2$$

     I due limiti sono uguali solo se

     $$b = (b+1)\log 2 \Leftrightarrow b = \frac{\log 2}{1 - \log 2}.$$

     e ciò garantisce che anche il limite $x \to 0$ della funzione coincide con $f(0)$ e quindi che la funzione è continua in 0;
  3. *continuità nel punto* $\pi/2$. Per $x = \pi/2$ la funzione assume il valore

     $$f(\pi/2) = a.$$

     In modo del tutto analogo a quanto visto al punto precedente calcoliamo

     $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} a \sin x + b \cos x = a$$

e
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{2}{2x-\pi} - a + \sqrt{2}\right] =$$
$$= -a + \sqrt{2} + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{2}{2x-\pi}.$$
Posto $z = (x-\pi/2)^{-1}$ possiamo riscrivere l'ultimo limite come
$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\sin z}{z} = 0.$$
In conclusione allora avremo continuità quando limite destro e sinistro coincidono ossia quando
$$a = -a + \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Riassumendo la funzione di partenza è continua se
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b = \frac{\log 2}{1-\log 2}.$$

Esercizio 17 *Si consideri la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\cos(\pi x)}{1+x^2} & x \le 0 \\ \frac{\alpha x - \arctan\alpha x + 1 - e^{x^4}}{x - \sin x + x\log\cosh x} & x > 0 \end{cases}$$
e si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ *è continua.*

Soluzione.

- La funzione è *definita* su tutto $\mathbb{R}$.
- La funzione è *continua* in $D = \mathbb{R} - \{0\}$ in quanto composizione di funzioni continue in D.
- Per esaminare la continuità nel punto 0 studiamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite del rapporto
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha x - \arctan\alpha x + 1 - e^{x^4}}{x - \sin x + x\log\cosh x}.$$
Ricordato, che nel limite $x \to 0$, valgono i seguenti sviluppi asintotici:
$$\arctan\alpha x = \alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{3} + o(x^4) \qquad e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$$
possiamo riscrivere il numeratore nella forma
$$\alpha x - \arctan\alpha x + 1 - e^{x^4} = \frac{\alpha^3 x^3}{3} - x^4 + o(x^4)$$

Ricordato inoltre che, sempre nel limite $x \to 0$, si ha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \sinh x = x + o(x^2)$$

avremo:

$$x - \sin x + x \log \cosh x = x - \sin x + x \log \sqrt{1 + \sinh^2 x} =$$

$$= x - \sin x + \frac{x}{2} \log(1 + \sinh^2 x) =$$

$$= x - \sin x + \frac{x}{2}[\sinh^2 x + o(\sinh^2 x)] = x - \sin x + \frac{x}{2}[x^2 + o(x^2)] =$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

A posteriori dell'analisi svolta riscriviamo il limite di partenza nella forma

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x - \arctan \alpha x + 1 - e^{x^4}}{x - \sin x + x \log \cosh x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\alpha^3 x^3}{3} - x^4 + o(x^4)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$$

ed osserviamo che il suo valore l dipende da α:

1. se $\alpha = 0$ allora $l = 0$;
2. se $\alpha \neq 0$ allora $l = \alpha^3/2$.

Per concludere l'esercizio è sufficiente osservare che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\cos(\pi x)}{1 + x^2} = f(0) = 2$$

e che la continuità si ha solo nel caso in cui

$$\frac{\alpha^3}{2} = 2$$

ossia se $\alpha = \sqrt[3]{4}$.

Esercizio 18 *Siano a e b numeri reali e sia $f(x)$ così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x+1) & x \leq 0 \\ a^2 \sin x + b^2 \cos x & x > 0 \end{cases}$$

determinare i valori di a e b in modo che $f(x)$ sia continua e con derivata continua in $\mathbb{R}$.

Soluzione. Osserviamo che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, che essa è continua in $\mathbb{R}-\{0\}$ (composizione di funzioni continue) e che per avere la continuità anche nello 0 deve essere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b^2 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

da cui $b_1 = \sqrt{\pi}/2$ e $b_2 = -\sqrt{\pi}/2$.

Come noto se una funzione è derivabile in un punto allora essa è continua in quel punto e quindi studiamo la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x+1) & x \le 0 \\ a^2 \sin x + \frac{\pi}{4}\cos x & x > 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}-\{0\}$ la derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+2x+2} & x < 0 \\ a^2 \cos x - \frac{\pi}{4}\sin x & x > 0 \end{cases}$$

che è una funzione continua. Notiamo che non è stata ancora definita la derivata prima della funzione nello 0. Se poniamo

$$f'(0) := \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a^2 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$$

ossia se $a_1 = \sqrt{2}/2$ e $a_2 = -\sqrt{2}/2$, la funzione risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e con derivata prima continua.

5 Esercizi sulle serie

Esercizio 19 *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n^2}$$

Soluzione. Prima di procedere alla soluzione dell'esercizio ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e che, più in generale, vale la seguente importante

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{4}$$

con $x\in\mathbb{R}$. Osservato che la serie di cui dobbiamo studiare la convergenza è a termini positivi possiamo applicare il criterio della radice e calcolare il limite

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n^2}} \Rightarrow L=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

Possiamo riscrivere l'ultimo limite nella forma più espressiva

$$L=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n} \tag{5}$$

con $x=-2/3$. Utilizzando il limite notevole (4) si ha allora

$$L=e^{-2/3}<1$$

da cui concludiamo che la serie è convergente.

Nota. Al lettore attento non sarà sfuggito il fatto che il limite (5) non è uguale al limite (4)! In effetti il limite (5) è il limite della successione dei termini di indice pari estratta dalla successione di termine generico

$$a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Sappiamo tuttavia dalla teoria che se una successione ha limite (finito o no), allora **qualunque** successione estratta da essa ha lo stesso limite!

Esercizio 20 *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sin n^3)^2}{n^2+\sqrt{n}} \tag{6}$$

Soluzione. La serie di cui dobbiamo studiare la convergenza è una serie a termini di segno alterno. Una possibile strategia per affrontare l'esercizio consiste nello studiare la sua convergenza assoluta ossia la convergenza della serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n^3)^2}{n^2+\sqrt{n}}$$

che è una serie a termini non negativi. Se riusciamo a dimostrare che la serie (6) è assolutamente convergente ciò sarà sufficiente per concludere che essa è anche semplicemente convergente. Osserviamo che per il termine generico della serie dei moduli vale la seguente maggiorazione

$$\frac{(\sin n^3)^2}{n^2+\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$$

infatti

$$-1 \leq \sin n^3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\sin n^3)^2 \leq 1$$

e allo stesso tempo

$$n^2 + \sqrt{n} > n^2.$$

Ora la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

è come noto convergente. Per il **criterio del confronto** possiamo allora concludere che, essendo la serie dei moduli maggiorata da una serie convergente, essa risulta a sua volta convergente e ciò conclude l'esercizio.

Esercizio 21 *Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{n^3 \log^n(x+1)}.$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. In primo luogo osserviamo che la serie è definita e a termini reali solo se $x > -1$, con $x \neq 0$.

1. **Convergenza assoluta**. Iniziamo dallo studio della convergenza assoluta della serie ossia discutendo il carattere della serie a termini positivi

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{n^3 |\log(x+1)|^n}$$

   che dipende dal valore del numero reale $a = |\log(x+1)|$.

a) Se $a > 1$, ossia se $x > e - 1$ o $-1 < x < e^{-1} - 1$, utilizzando il **criterio del rapporto** si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 + 5}{(n+1)^3 a^{n+1}} \cdot \frac{n^3 a^n}{n^2 + 5} = \frac{1}{a} < 1$$

da cui concludiamo che la serie converge. Per i valori di x specificati sopra la serie converge anche semplicemente in quanto, come noto dalla teoria, la convergenza assoluta è condizione sufficiente per la convergenza semplice.

b) Se $a < 1$ ossia se $e^{-1} - 1 < x < e - 1$, con $x \neq 0$ sempre ricorrendo al criterio del rapporto possiamo concludere che la serie non è assolutamente convergente.

c) Se $a = 1$, ossia se $x = e - 1$ o $x = e^{-1} - 1$, la serie di partenza coincide con la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{n^3}$$

Questa serie maggiora la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{n^3} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e quindi, sapendo che la serie di armonica diverge, per il criterio del confronto diverge.

2. **Convergenza semplice** Per i valori di x in corrispondenza dei quali la serie di partenza è a termini positivi è evidente che convergenza assoluta e semplice sono equivalenti. Per i valori di x in corrispondenza dei quali la serie di partenza ha termini di segno alterno la situazione è più delicata. La convergenza assoluta è infatti condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza. In parole povere può accadere che una serie a termini di segno alterno che non converge assolutamente converga semplicemente! Dobbiamo allora riprendere in considerazione tutte le situazioni in cui i valori di x sono tali da rendere la serie di partenza a termini di segno alterno e allo stesso tempo **non** convergente assolutamente.

d) $x = e^{-1} - 1$: in questo caso $\log(x + 1) = -1$ e si ottiene la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 5}{n^3}$$

che è convergente per il criterio di Leibniz. Infatti se consideriamo la successione di termine generico

$$a_n = \frac{n^2+5}{n^3}$$

possiamo stabilire che

(a) a_n è infinitesima ossia ha limite 0 al tendere di n all'infinito;

(b) a_n è monotona strettamente decrescente

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+5}{(n+1)^3} < \frac{n^2+5}{n^3} = a_n$$

in quanto la disequazione precedente è equivalente a

$$-n^4 - 2n^3 - 16n^2 - 15n - 5 < 0$$

che è sempre verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che per quanto visto in precedenza al punto c) questa serie semplicemente convergente *non* converge assolutamente!

e) $e^{-1}-1 < x < 0$: in questo caso avremo $-1 < \log(x+1) < 0$. Posto $\log(x+1) = -1/a$, con $a > 1$, si ottiene allora la serie di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n^2+5)a^n}{n^3}$$

che diverge in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+5)a^n}{n^3} = +\infty.$$

Esercizio 22 *Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}.$$

Soluzione.

a) Convergenza semplice. La serie è a termini di segno alterno e quindi possiamo ricorrere al criterio di Leibniz. Consideriamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generico

$$a_n = \frac{1}{n - \log n}$$

ed osserviamo i seguenti fatti:

1. a_n è monotona strettamente decrescente. Infatti

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1-\log(n+1)} < \frac{1}{n-\log n} = a_n$$

in quanto

$$n - \log n < n+1-\log(n+1) \Leftrightarrow 1 > \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

che è verificata se $(1+1/n) < 2 < e$.

2. a_n è infinitesima (ha limite 0).

Per il criterio di Leibniz la serie di partenza risulta allora convergente.

b) Convergenza assoluta. Consideriamo la serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-\log n}.$$

Per $n \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{n-\log n} \geq \frac{1}{n}$$

da cui, sapendo che la serie armonica è divergente, per il criterio del confronto possiamo stabilire che la serie dei moduli è divergente.

Esercizio 23 *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}.$$

Soluzione. Iniziamo osservando che la serie di cui si chiede di studiare la convergenza è a termini positivi. Se $n \geq 1$

$$0 < \log(n+1) < \sqrt{n}$$

da cui anche

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)} > \frac{1}{n}.$$

La serie di partenza è maggiorante della serie armonica. Per il **criterio del confronto**, tenuto conto del fatto che la serie armonica è divergente, la serie di partenza diverge.

Esercizio 24 *Dire se la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{1/n}\left(\cosh\frac{1}{n^3}-1\right)}{\sin\frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}}$$

converge assolutamente e semplicemente.

Soluzione. Iniziamo osservando che la serie di cui dobbiamo studiare la convergenza è a termini di segno alterno. Studiamo in primo luogo la convergenza assoluta ossia la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{e^{1/n}\Big(\cosh\frac{1}{n^3}-1\Big)}{\sin\frac{1}{n^{4/3}}-\frac{1}{n^{4/3}}}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{1/n}\Big(\cosh\frac{1}{n^3}-1\Big)}{\frac{1}{n^{4/3}}-\sin\frac{1}{n^{4/3}}}$$

che essendo a termini positivi può essere trattata utilizzando il **criterio del confronto asintotico**. Prima di procedere alla soluzione dell'esercizio si ricorda che, nel limite $x \to 0$, valgono i seguenti sviluppi asintotici:

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

Per $n \to +\infty$, posto $x = 1/n$, si ha

$$\cosh\frac{1}{n^3}-1=\frac{1}{2n^6}+o(1/n^9) \qquad \frac{1}{n^{4/3}}-\sin\frac{1}{n^{4/3}}=\frac{1}{6n^4}+o(1/n^{16/3}).$$

Il termine generico della serie a_n si può allora scrivere come

$$a_n=\frac{e^{1/n}\Big(\frac{1}{2n^6}+o(1/n^9)\Big)}{\frac{1}{6n^4}+o(1/n^{16/3})}=\frac{e^{1/n}3(1+o(2/n^5))}{n^2+o(6/n^{4/3})}.$$

Osservato che per $n \to +\infty$ si ha $3e^{1/n} \to 3$, si intuisce che in tale limite il termine generico della serie è confrontabile con $1/n^2$. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{1/n}3(1+o(2/n^5))}{1+o(6/n^{10/3})}=3$$

da cui concludiamo che la serie di partenza ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

che è convergente. La convergenza assoluta della serie è sufficiente per garantire anche la convergenza semplice della stessa.

Esercizio 25 *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{2/3}\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right|$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. La serie è evidentemente a termini positivi e quindi possiamo utilizzare il **criterio del confronto asintotico**. Osserviamo quindi che

$$\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}+o(1/n^4)-\frac{1}{n^\alpha}\right|$$

da cui si comprende che l'ordine di questo termine dipende dal valore di α. Distingueremo allora i seguenti casi.

1. $\alpha = 1$. In questo caso vi è una cancellazione e il termine generico della serie si può scrivere come

   $$a_n = n^{2/3}\left|\frac{1}{6n^3}+o(1/n^4)\right| == \frac{1}{n^{7/3}}\left|\frac{1}{6}+o(1/n)\right|$$

   osservato che

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{7/3}}} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{6}+o(1/n)\right| = \frac{1}{6}$$

   otteniamo che la serie di partenza ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{7/3}}$$

   ossia è convergente in quanto $7/3 > 1$.

2. $\alpha > 1$. In questo caso l'infinitesimo dominante è $1/n$ a quindi, raccogliendo, il termine generico della serie si può scrivere come

   $$a_n = \frac{1}{n^{1/3}}\left|1-\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}+o(1/n^3)\right|.$$

   Osservato che

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{1/3}}} = \lim_{n\to+\infty}\left|1-\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}+o(1/n^3)\right| = 1$$

   avremo che la serie di partenza ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$$

   ossia è divergente in quanto $1/3 < 1$.

3. $0 < \alpha < 1$. In questo caso l'infinitesimo dominante è $1/n^\alpha$ a quindi, raccogliendo, il termine generico della serie si può scrivere come

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha-2/3}}\left|\frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{6n^{2-\alpha}} - 1 + o(1/n^{4-\alpha})\right|$$

Osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha-2/3}}} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{6n^{2-\alpha}} - 1 + o(1/n^{4-\alpha})\right| = 1$$

avremo che la serie di partenza ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2/3}}.$$

Come noto questa serie converge solo se

$$\alpha - \frac{2}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{3}$$

e quindi, dal momento che $0 < \alpha < 1$, risulta sempre divergente.

Esercizio 26 *Discutere la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[9n^3\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi in quanto $\arcsin x \geq x$ per $x \in [0,1]$ e quindi, per studiarne il carattere, possiamo utilizzare il **criterio della radice**. Prima di procedere ricordiamo che nel limite $x \to 0$ vale il seguente sviluppo

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Si tratta ora di calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} 9n^3\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right).$$

Osservato che per $n \to +\infty$, sostituito $x = 1/n$ nello sviluppo dell'arcoseno, si ha:

$$\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{6n^3} + o(1/n^4)$$

il calcolo del limite si riduce a

$$\lim_{n\to+\infty} 9n^3\Big(\frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{3}{2} + o\Big(\frac{9}{n}\Big)\Big) = \frac{3}{2} > 1$$

e quindi la serie diverge.

Esercizio 27 *Studiare il carattere della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\left(2 + \tan \frac{1}{n}\right)^{1/n}\left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Soluzione. La serie è a termini negativi. Infatti il denominatore è positivo mentre il numeratore è negativo in quanto, per $x > 0$, $\arctan x < x$. Lo studio del carattere della serie è equivalente a quello della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^2}}{\left(2 + \tan \frac{1}{n}\right)^{1/n}\left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)} \tag{7}$$

il cui termine generico è l'opposto del termine generico della serie di partenza. Prima di iniziare l'esercizio si ricorda che, nel limite $x \to 0$, valgono i seguenti sviluppi asintotici

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Posto $x = 1/n$, nel limite $n \to +\infty$, il termine generico a_n della serie (7) si può scrivere come

$$a_n = \frac{\frac{1}{3n^6} + o(1/n^6)}{\left(2 + \tan \frac{1}{n}\right)^{1/n}\left(\frac{1}{2n^4} + o(1/n^4)\right)}.$$

Osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \tan \frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$$

si comprende che il termine generico è confrontabile con $1/n^2$. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n^4} + o(1/n^4)}{\left(2 + \tan \frac{1}{n}\right)^{1/n}\left(\frac{1}{2n^4} + o(1/n^4)\right)} = \frac{2}{3}.$$

Per quanto stabilito dal **criterio del confronto asintotico** la serie (7), e quindi la serie di partenza, ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

che come noto è convergente.

Esercizio 28 *Studiare il carattere della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{n + n^2}{n^\alpha + 3}\right)\right].$$

al variare di $\alpha \in [2, +\infty) \subset \mathbb{R}$.
Soluzione. La serie è a termini positivi e il suo termine generico è

$$a_n = 1 - \cos\left(\frac{n + n^2}{n^\alpha + 3}\right).$$

Articoliamo la discussione in due momenti:

1. $\alpha = 2$. In questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \cos 1 \neq 0$$

e quindi la serie diverge.

2. $\alpha > 2$. In questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

e, nel limite $n \to \infty$, anche

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n + n^2}{n^\alpha + 3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-4}}\right)$$

dove si è usato il ben noto sviluppo asintotico di $1 - cosy$, per $y \to 0$. Il carattere della serie è allora lo stesso della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-4}}$$

che converge solo se $2\alpha - 4 > 1$, ossia se

$$\alpha > \frac{5}{2}.$$

In conclusione, per $\alpha > 2$, la serie converge se $\alpha > 5/2$ e diverge se $2 < \alpha < 5/2$.

6 Studi di funzione

Esercizio 29 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \log \left| \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x} \right|$$

(dominio, limiti ed asintoti, continuità , derivabilità , monotonia, punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico).

Soluzione. Per risolvere l'esercizio seguiamo la traccia proposta:

- **Dominio**. La funzione è definita per tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano
$$\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x} \neq 0 \qquad\qquad \frac{3}{2} - e^{-x} \neq 0$$
e quindi il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} - \{\log 2/3\}$.

- **Limiti ed eventuali asintoti**. I limiti che si devono calcolare sono all'infinito
$$\lim_{x\to+\infty} \log \left| \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x} \right| = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \log \left| \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x} \right| = \lim_{x\to-\infty} \log \left| e^{-2x} \left(\frac{3}{2} \cdot e^{x} - 1 \right) \right| = +\infty$$
e a $\log 2/3$ (punto di accumulazione per D che *non* appartiene a D)
$$\lim_{x\to\log 2/3} \log \left| \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x} \right| = -\infty$$
Possiamo concludere che la funzione non ammette asintoti orizzontali ma ammette come asintoto verticale la retta $x = \log 2/3$. Per verificare la presenza di asintoti obliqui valutiamo i seguenti limiti
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log \left| \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x} \right|}{x}$$
da cui, utilizzando il Teorema di De L'Hopital, si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{3}{2} \cdot e^{-x} + 2e^{-2x}}{\frac{3}{2} \cdot e^{-x} - e^{-2x}} = -1.$$
Calcoliamo allora anche
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to+\infty} \log \left| e^{-x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right) \right| + x = \log \frac{3}{2}.$$

Concludiamo allora che la funzione ammette come asintoto obliquo destro la retta
$$r\colon y=-x+\log\frac{3}{2}.$$
Analogamente a quanto appena visto calcoliamo
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log\left|\frac{3}{2}\cdot e^{-x}-e^{-2x}\right|}{x}$$
da cui, utilizzando il Teorema di De L'Hopital, si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{3}{2}\cdot e^{-x}+2e^{-2x}}{\frac{3}{2}\cdot e^{-x}-e^{-2x}}=-2.$$
Calcoliamo allora anche
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\log\left|e^{-2x}\left(\frac{3}{2}e^{x}-1\right)\right|+x=0.$$
Concludiamo allora che la funzione ammette come asintoto obliquo sinistro la retta
$$s\colon y=-2x.$$

- **Continuità**. La funzione è continua in D in quanto composizione di funzioni continue.

- **Derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima**. La funzione è derivabile in D con derivata
$$f'(x)=\frac{-\frac{3}{2}\cdot e^{-x}+2e^{-2x}}{\frac{3}{2}\cdot e^{-x}-e^{-2x}}:=\frac{n(x)}{d(x)}.$$

- **Monotonia**. Osserviamo in primo luogo che $n(x)\geq 0$ se $x\leq\log 4/3$ e che $d(x)>0$ se $x>\log 2/3$.

  Possiamo ora suddividere lo studio della monotonia come segue:

  a) se $x\in(-\infty,\log 2/3)$ allora $f'(x)<0$ e quindi la funzione *ristretta* a questo intervallo è **monotona strettamente decrescente**

  b) se $x\in(\log 2/3,\log 4/3)$ allora $f'(x)>0$ e quindi la funzione, *ristretta* all'intervallo $(\log 2/3,\log 4/3)$, è **monotona strettamente crescente**;

  c) se $x\in(\log 4/3,+\infty)$ allora $f'(x)<0$ e quindi la funzione, *ristretta* all'intervallo $(\log 4/3,+\infty)$, è **monotona strettamente decrescente**.

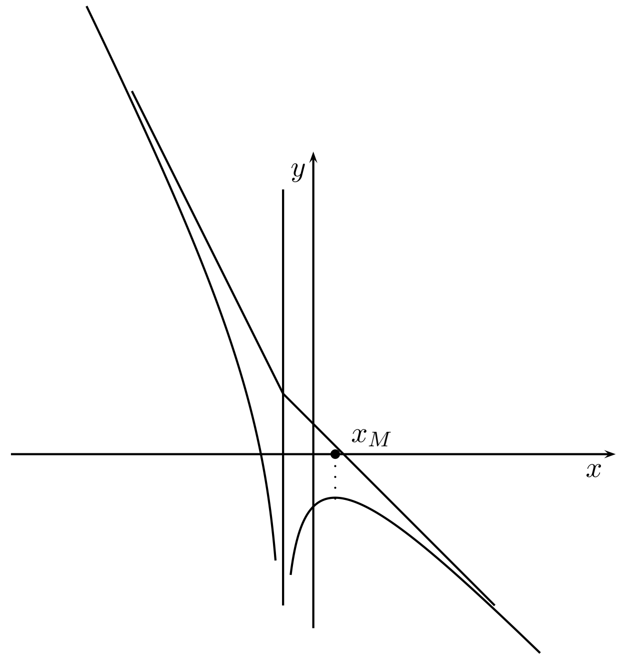

Grafico di $f(x)$

- **Punti di estremo relativo e assoluto**. Dallo studio della derivata prima possiamo anche concludere che il punto

$$x_M = \log 4/3$$

è un punto di **massimo relativo** per la funzione e che $f(x_M) = \log 9/16$ è il massimo relativo. La funzione non ammette punti di estremo assoluto.

Esercizio 30 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \arctan \left| \frac{1}{\sinh x} \right| - \frac{\sinh x}{3}$$

*(dominio, limiti ed eventuali asintoti, continuità con eventuali prolungamenti, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico. **Facoltativo**: convessità e flessi).*

Soluzione. Per risolvere l'esercizio seguiamo la traccia proposta:

- **Dominio**. La funzione è definita per tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano
$$\sinh x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$
e quindi il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- **Limiti ed eventuali asintoti**. I limiti che si devono calcolare sono all'infinito
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3} = +\infty.$$
e a zero (punto di accumulazione per D che *non* appartiene a D)
$$\lim_{x\to 0} \arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3} = \frac{\pi}{2}$$
Possiamo concludere che la funzione non ammette né asintoti orizzontali né asintoti verticali. Per verificare la presenza di asintoti obliqui valutiamo i limiti
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3x} = +\infty$$
da cui possiamo concludere che la funzione non ha asintoti obliqui.

- **Continuità con eventuali prolungamenti**. La funzione è continua in D (composizione di funzioni continue) e, per quanto visto al punto precedente, può essere prolungata per continuità su tutto $\mathbb{R}$ ponendo
$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

- **Derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima**. La funzione è derivabile in D con derivata
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} & x > 0 \\ +\frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} & x < 0 \end{cases}$$
e nello zero si calcolano i seguenti limiti della derivata prima
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} = -\frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} +\frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} = +\frac{2}{3}.$$
da cui si ha che la funzione ha un **punto angoloso** in $x = 0$.

- **Monotonia**. Possiamo suddividere lo studio della monotonia come segue

  a) se $x \in (0, +\infty)$ allora $f'(x) < 0$ e quindi la funzione *ristretta* a questo intervallo è **monotona strettamente decrescente**.

  b) Se $x \in (-\infty, 0)$ si ha

  $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} > 0 \Leftrightarrow \cosh^2 x - 3 < 0$$

  da cui anche

  $$\cosh x - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -\text{settcosh}\sqrt{3} < x < 0.$$

  - La funzione, *ristretta* all'intervallo $(-\text{settcosh}\sqrt{3}, 0)$, è **monotona strettamente crescente**;
  - La funzione *ristretta* all'intervallo $(-\infty, -\text{settcosh}\sqrt{3})$ è **monotona strettamente decrescente**.

- **Punti di estremo relativo e assoluto**. Dallo studio della derivata prima possiamo anche concludere che il punto

  $$x_m = -\text{settcosh}\sqrt{3}$$

  è un punto di **minimo relativo** per la funzione. La funzione non ammette punti di estremo assoluto.

Procediamo ora allo studio delle parti facoltative dell'esercizio:

- **Convessità e flessi**. La derivata seconda della funzione in D, dopo qualche minimo aggiustamento, è

  $$f''(x) = \begin{cases} +\sinh x\left(\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{3}\right) & x > 0 \\ -\sinh x\left(\frac{1}{\cosh^2 x} + \frac{1}{3}\right) & x < 0 \end{cases}$$

  Possiamo articolare lo studio del segno della derivata seconda in due parti.

  a) Se $x \in (-\infty, 0)$ si ha $f''(x) > 0$ e quindi in tale intervallo la funzione è **convessa**.

  b) Se $x \in (0, +\infty)$:
  - $f(x)$ è **convessa** se $x \in (0, \text{settcosh}\sqrt{3})$
  - $f(x)$ è **concava** altrove.

  Il punto $x_f = \text{settcosh}\sqrt{3}$, in cui la derivata seconda si annulla, è un **punto di flesso**. L'equazione della retta tangente il grafico della funzione nel punto di flesso è data da

  $$y - f(x_f) = f'(x_f)(x - x_f).$$

  Lo sviluppo dei calcoli si lascia per esercizio al lettore.

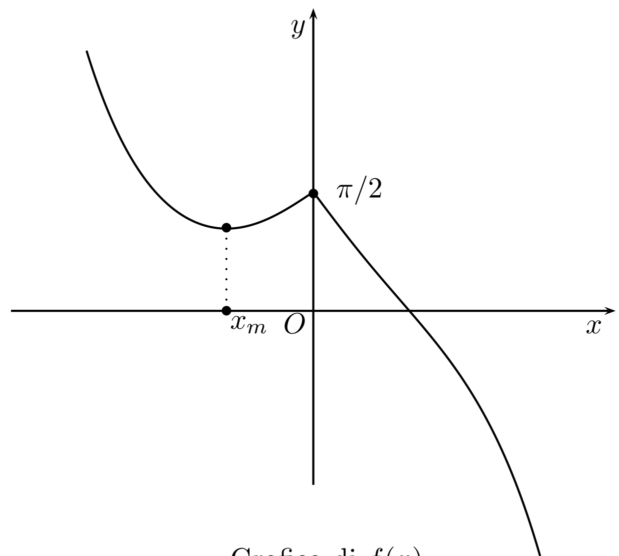

Grafico di $f(x)$

Esercizio 31 *Studiare la funzione*

$$f(x) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(x+1)}\right) - x$$

(dominio e continuità , limiti ed eventuali asintoti, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico.)

Soluzione. Per risolvere l'esercizio seguiamo la traccia proposta:

- **Dominio**. Osservato che per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ si ha $\cosh(x+1) \geq 1$ e che per l'argomento dell'arcoseno vale la doppia disuguaglianza

$$0 < \frac{1}{\cosh(x+1)} \leq 1$$

  possiamo concludere che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è inoltre continua su $\mathbb{R}$.

- **Limiti ed eventuali asintoti**. La funzione non ammette asintoti verticali. Gli unici limiti significativi sono all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} 2 \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(x+1)}\right) - x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2\arcsin\left(\frac{1}{\cosh(x+1)}\right) - x = +\infty$$

da cui si comprende che la funzione non ammette neppure asintoti orizzontali. Per indagare la presenza di asintoti obliqui calcoliamo in primo luogo i limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x}\arcsin\left(\frac{1}{\cosh(x+1)}\right) - 1 = -1.$$

Dal momento che questi limiti sono non nulli calcoliamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} 2\arcsin\left(\frac{1}{\cosh(x+1)}\right) = 0$$

da cui possiamo concludere che la retta $r\colon y + x = 0$ è un *asintoto obliquo*.

- **Derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima.** La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = -\frac{2\sinh(x+1)}{\sqrt{\cosh^2(x+1)-1}\cdot\cosh(x+1)} - 1$$

e, ricordata un'identità fondamentale tra funzioni iperboliche, si riduce a

$$f'(x) = -\frac{2\sinh(x+1)}{|\sinh(x+1)|\cosh(x+1)} - 1.$$

da cui, esplicitando il modulo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\cosh(x+1)} - 1 & x > -1 \\ +\frac{2}{\cosh(x+1)} - 1 & x < -1 \end{cases}$$

Calcoliamo per concludere i limiti destro e sinistro della derivata prima nel punto -1:

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} -\frac{2\sinh(x+1)}{|\sinh(x+1)|\cosh(x+1)} - 1 = -3$$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} -\frac{2\sinh(x+1)}{|\sinh(x+1)|\cosh(x+1)} - 1 = +1.$$

Nel punto $x = -1$ la funzione ha un **punto angoloso**.

- **Monotonia**. Osserviamo che se $x \in (-1, +\infty)$ la derivata prima è strettamente negativa e quindi la funzione, ristretta a tale intervallo, è **monotona strettamente decrescente**. Se $x \in (-\infty, -1)$ si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\cosh(x+1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \cosh(x+1) < 2$$

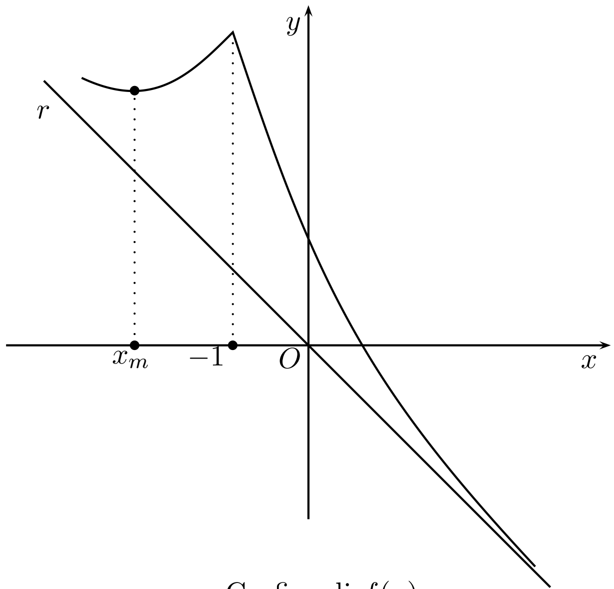

Grafico di $f(x)$

e la disuguaglianza è soddisfatta per $x \in (-1 - \text{settcosh}2, -1)$. In questo intervallo la funzione è **monotona strettamente crescente**. Nell'intervallo $(-\infty, -1 - \text{settcosh}2)$ la funzione è **monotona strettamente decrescente**.

- **Punti di estremo relativo e assoluto**. Dallo studio della derivata prima appare chiaro che il punto $x_m = -1 - \text{settcosh}2$ è un punto di minimo relativo. La funzione non ammette punti di estremo assoluto.

7 Calcolo integrale

Esercizio 32 *Calcolare, per parti, l'integrale*

$$\int \left(\arcsin x - \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| \right) dx$$

Soluzione. Per la proprietà di linearità l'integrale si può riscrivere come somma di due integrali

$$\int \arcsin x dx - \int \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| dx$$

che calcoliamo separatamente:

1. considerando come fattore finito la funzione $\arcsin(x)$ per il primo integrale avremo:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

da cui anche

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c_1$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$.

2. per quanto riguarda il calcolo del secondo integrale possiamo procedere come segue:

$$\int \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| dx = \int \log |1+2x| dx - \int \log |3-x| dx =$$

$$= x \log |1+2x| - \int \frac{2x}{1+2x} dx - x \log |3-x| - \int \frac{x}{3-x} dx =$$

$$= x \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| - \int \frac{1+2x-1}{1+2x} dx + \int \frac{3-x-3}{3-x} dx =$$

$$= x \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| + \frac{1}{2} \log |1+2x| + 3 \log |x-3| + c_2$$

con $c_2 \in \mathbb{R}$.

In conclusione avremo:

$$\int \arcsin x dx - \int \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| dx =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x \log \left| \frac{1+2x}{3-x} \right| + \frac{1}{2} \log |1+2x| + 3 \log |x-3| + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Il lettore attento avrà osservato che nello svolgimento dell'esercizio non si è tenuto conto del dominio delle funzioni da integrare. Quanto calcolato in effetti è valido solo se $x \in [-1, -1/2) \cup (-1/2, 1]$.

Esercizio 33 *Calcolare, per sostituzione, l'integrale*

$$\int_1^e \frac{\log^3 x}{x\sqrt{1+\log^4 x}}dx.$$

Soluzione. La sostituzione più opportuna per il calcolo dell'integrale è la seguente:

$$z = \log^2 x \quad \frac{2\log x}{x}dx = dz \quad z_1 = \log^2 1 = 0 \quad z_2 = \log^2 e = 1$$

che conduce a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}dz = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{1+z^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Esercizio 34 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 2\cos^2 x}.$$

Soluzione. Possiamo riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x}$$

da cui raccogliendo $\cos^2 x$ si ha

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x(\tan^2 x + 2\tan x + 2)}$$

Se ora ricordiamo che $D\tan x = 1/cos^2 x$ possiamo intuire che l'integrale si può calcolare utilizzando la sostituzione

$$z = \tan x \quad \frac{1}{\cos^2 x}dx = dz \quad z_1 = \tan 0 = 0 \quad z_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

che conduce all'integrale di una semplice funzione razionale

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2+2z+2} = \int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^2+1} = \Big[\arctan(z+1)\Big]_0^1 = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 35 *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx.$$

Soluzione. Prima di risolvere l'esercizio ricordiamo che valgono le seguenti formule trigonometriche:

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}.$$

Ricorrendo a queste formule l'integrale di partenza si riscrive nella forma

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2}{(1+\tan(x/2))^2} dx$$

da cui, operando la sostituzione

$$z = \tan(x/2) \quad dz = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))dx \quad z_1 = \tan 0 = 0 \quad z_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

si ottiene l'integrale della funzione razionale

$$\int_0^1 \frac{4}{(1+z)^2(1+z^2)} dz$$

Per eseguire il calcolo osserviamo che il polinomio al denominatore $R(z) = (1+z^2)(1+z)^2$ ammette la radice reale -1 (con molteplicità 2) e la coppia di radici complesse coniugate $\pm i$. La formula di decomposizione in fratti semlici ci informa del fatto che

$$\frac{4}{(1+z)^2(1+z^2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{1+z^2}$$

con A, B, C e D opportuni numeri reali. Sviluppando i calcoli ed uguagliando i numeratori si ha

$$(C+A)z^3 + (D+2C+B+A)z^2 + (2D+C+A)z + D+B+A = 4$$

da cui, per il principio di identità dei polinomi, anche

$$\begin{cases} C+A=0 \\ D+2C+B+A=0 \\ 2D+C+A=0 \\ D+B+A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C+A=0 \\ C+B=0 \\ D=0 \\ B+A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}$$

L'integrale da calcolare si riduce allora alla somma di integrali elementari:

$$\int_0^1 \frac{2}{1+z}dz + \int_0^1 \frac{2}{(1+z)^2}dz - \int_0^1 \frac{2z}{1+z^2}dz =$$

$$= 2\Big[\log|1+z|\Big]_0^1 - 2\Big[\frac{1}{1+z}\Big]_0^1 - \Big[\log(1+z^2)\Big]_0^1 = \log 2 + 1.$$

7.1 Integrali generalizzati

Negli esercizi che seguono vengono utilizzati sotto il nome di Criterio del confronto asintotico un certo numero di risultati teorici che riportiamo.

Iniziamo premettendo la seguente condizione necessaria:

Proposizione 4 *Sia* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tale che* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *sia convergente. Allora se esiste* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *deve essere* $L = 0$.

Ora valgono i seguenti:

Teorema 2 *(Criterio del confronto asintotico) Siano date due funzioni reali di variabile reale* f *e* g *definite su* $[a, +\infty$ *e tali che* $f(x) \geq 0$ *e* $g(x) > 0$ *per ogni* $x \geq a$. *Allora*

1. *se* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, $L \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$$

2. *se* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$$

3. *se* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Il teorema precedente viene utilizzato spesso eseguendo il confronto con funzioni del tipo $1/x^p$. Possiamo distinguere due casi

- **Confronto asintotico con** $1/x^p$ **per** $x \to +\infty$. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, una funzione definita non negativa e per ogni $x \geq 1$ esista $\int_1^x f(t)dt$.

  1. Se, per qualche $p > 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L \geq 0$, con $L \in \mathbb{R}$, allora $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.
  2. Se, per qualche $p \leq 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L > 0$ (oppure $L = +\infty$), allora $\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

- **Confronto asintotico con** $1/x^p$ **per** $x \to 0^+$ Sia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, una funzione definita non negativa e per ogni $x \in (0, 1]$ esista $\int_x^1 f(t)dt$.

  1. Se, per qualche $p < 1$, $\lim_{x\to 0^+} x^p f(x) = L \geq 0$, con $L \in \mathbb{R}$, allora $\int_0^1 f(x)dx < +\infty$.

2. Se, per qualche $p \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L > 0$ (oppure $L = +\infty$), allora $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$.

In conclusione, sempre per la soluzione degli esercizi, è utile ricordare che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$$

è *integrabile* se

1. $\alpha = 1$ e $\beta > 1$;
2. $\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

7.1.1 Esercizi

Esercizio 36 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\arctan(x^{2\alpha})}{x^\beta \sqrt{x+3}}, \quad x > 0$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. *Determinare l'insieme X delle coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converga e rappresentare X nel piano.*
2. *Calcolare una primitiva di $f(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.*
3. *Calcolare I nel caso precedente.*

Soluzione.

1. Articoliamo la soluzione della prima domanda nei seguenti casi:
   - $\alpha > 0$. In questo caso avremo che nel limite $x \to +\infty$

     $$\frac{\arctan x^{2\alpha}}{x^\beta \sqrt{x+3}} = \frac{\pi/2}{x^{\beta+1/2}} + o(1/x^{\beta+1/2})$$

     L'integrale improprio, per il **Criterio del confronto asintotico**, converge solo se

     $$\beta + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2}.$$

   - $\alpha = 0$. Nel limite $x \to +\infty$ si ha

     $$\frac{\arctan x^{2\alpha}}{x^\beta \sqrt{x+3}} = \frac{\pi/4}{x^{\beta+1/2}} + o(1/x^{\beta+1/2}).$$

     L'integrale improprio, per il **Criterio del confronto asintotico**, converge se

     $$\beta + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2}.$$

- $\alpha < 0$. Ora nel limite nel limite $x \to +\infty$, ricordato lo sviluppo di Mac Laurin della funzione arcotangente, si ha

$$\frac{\arctan x^{2\alpha}}{x^{\beta}\sqrt{x+3}} = \frac{1}{x^{\beta-2\alpha+1/2}} + o(1/x^{\beta-2\alpha+1/2})$$

  e l'integrale converge solo se

$$\beta - 2\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > 2\alpha + \frac{1}{2}.$$

  La rappresentazione dell'insieme X nel piano è in Figura 2.

2. Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\arctan 1}{x\sqrt{x+3}} dx = \frac{\pi}{4} \int \frac{dx}{x\sqrt{x+3}}$$

   Procediamo operando la sostituzione

$$z = \sqrt{x+3} \quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} dx$$

   da cui si ottiene

$$\frac{\pi}{2} \int \frac{dz}{z^2-3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \log \frac{|z-\sqrt{3}|}{|z+\sqrt{3}|} + c$$

   con $c \in \mathbb{R}$. Quindi, ricordata l'espressione di z, una primitiva della funzione data è

$$F(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \log \frac{|\sqrt{x+3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}.$$

3. La risposta alla terza domanda, tenuto conto di quanto appena calcolato, si riduce a:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} [F(k) - F(1)] = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Esercizio 37 *Dato l'integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+1/x} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

1. *determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti convergente;*

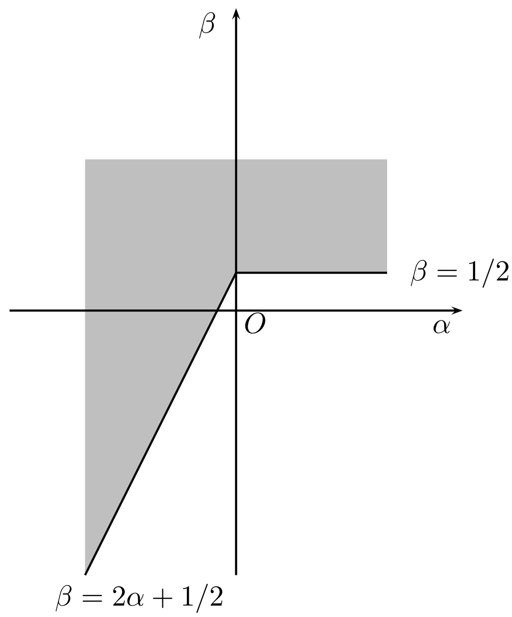

Figura 2: Insieme X

2. lo si calcoli per $\alpha = -2$.

Soluzione.

1. Per rispondere alla prima domanda osserviamo in primo luogo che nel limite $x \to +\infty$ la funzione integranda si scrive come

$$\frac{x^\alpha}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = x^\alpha\Big(\frac{1}{x}+o(1/x)\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}+o(1/x^{1-\alpha}).$$

Per il **Criterio del confronto asintotico** l'integrale converge solo se

$$1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

2. Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che

$$\mathrm{D}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = 2\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\frac{-x^{-2}}{1+1/x}$$

da cui anche

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{-2}}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \lim_{k\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_1^k = \log 2$$

Esercizio 38 *Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 3/2$.

Soluzione. Iniziamo riscrivendo l'integrale come somma di due integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx = \int_0^{a} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx + \int_a^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

con $a > 0$. Per poter discutere la convergenza in modo completo ed economico operiamo nel secondo integrale la sostituzione

$$z = \frac{1}{x} \quad dz = -\frac{1}{x^2} dx \quad z_1 = 1/a \quad z_2 = 0$$

che conduce a:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx = \int_0^{a} \frac{x \log x}{(1+x^2)^\alpha} dx - \int_0^{1/a} \frac{\log x}{x^{3-2\alpha}(1+x^2)^\alpha} dx$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è cambiato il nome alla variabile (muta) di integrazione. Posto $k = \min\{a, 1/a\}$ osserviamo che lo studio della convergenza dell'integrale si riduce a quello della convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{k} \frac{\log x}{(1+x^2)^\alpha} \Big(\frac{x^{4-2\alpha} - 1}{x^{3-2\alpha}} \Big) dx.$$

Procediamo allora all'esame dei seguenti casi:

1. $\alpha < 2$. In questo caso avremo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{(1+x^2)^\alpha} \Big(\frac{x^{4-2\alpha} - 1}{x^{3-2\alpha}} \Big) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\log x}{x^{3-2\alpha}}$$

   da cui concludiamo che la funzione integranda è, nel limite $x \to 0^+$, un $o(1/x^\gamma)$ con

$$3 - 2\alpha < \gamma$$

   Per il Teorema del confronto asintotico l'integrale converge se $\gamma < 1$. Per determinare l'insieme dei valori di α in cui si ha convergenza osserviamo che

$$\begin{cases} 3 - 2\alpha < 1 \\ \alpha < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 2.$$

2. $\alpha > 2$. In questo caso avremo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{(1+x^2)^\alpha}\Big(\frac{x^{4-2\alpha}-1}{x^{3-2\alpha}}\Big) = \lim_{x\to 0^+} x\log x$$

da cui concludiamo che la funzione integranda è, nel limite $x \to 0^+$, un $o(1/x^\delta)$ con

$$-1 < \delta < 1$$

e quindi l'integrale converge.

3. $\alpha = 2$. In questo caso l'integrale è convergente in quanto la funzione integranda è identicamente nulla.

Passiamo ora alla soluzione del secondo quesito osservando che alla luce dell'analisi precedente se $\alpha = 3/2$ l'integrale converge. Per definizione l'integrale da calcolare coincide con il limite

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{1/h}^{h} \frac{x\log x}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$$

Determiniamo allora una primitiva della funzione integranda. Integrando per parti, con fattore finito $\log x$, si ha

$$\int \frac{x\log x}{(1+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{\log x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Con la sostituzione

$$z = \frac{1}{x} \qquad dz = -\frac{1}{x^2}dx$$

il secondo integrale diviene immediatamente calcolabile

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\text{settsinh } z + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. In conclusione allora

$$I = \lim_{h\to+\infty} \Big[-\frac{\log x}{\sqrt{1+x^2}} - \text{settsinh } \frac{1}{x}\Big]_{1/h}^{h} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \Big(-\frac{\log h}{\sqrt{1+h^2}} - \text{settsinh } \frac{1}{h} - \frac{h\log h}{\sqrt{1+h^2}} + \text{settsinh } h\Big).$$

Ricordato che $\text{settsinh} x = \log(x+\sqrt{1+x^2})$ avremo

$$\lim_{h\to+\infty} \Big(-\frac{\log h}{\sqrt{1+h^2}} - \frac{h\log h}{\sqrt{1+h^2}} + \log\frac{h+\sqrt{1+h^2}}{1+\sqrt{1+h^2}} + \log h\Big) = \log 2.$$

8 Esercizi sulle equazioni differenziali

Esercizio 39 *Data l'equazione differenziale*

$$y' = (y-1)(y-4)\cot x$$

a) *se ne trovino tutte le sue soluzioni costanti;*

b) *se ne trovi la soluzione generale in forma implicita;*

c) *si trovi la soluzione del problema di Cauchy* $y(3\pi/2) = 5$ *in forma esplicita.*

Soluzione. Iniziamo con alcune osservazioni di carattere generale. L'equazione differenziale è **a variabili separabili** ossia del tipo

$$y' = a(x)b(y)$$

con $a(x) = \cot x$ e $b(y) = (y-1)(y-4)$. La funzione $b(y)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ mentre $a(x)$ è definita e continua in $D \subset \mathbb{R}$ con

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi).$$

a) Per rispondere al primo quesito supponiamo che $y = c$, con $c \in \mathbb{R}$, sia una soluzione costante dell'equazione differenziale di partenza. Sostituendo avremo:

$$0 = (c-1)(c-4)\cot x$$

da cui si ha che le soluzioni costanti sono solo $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$.

b) L'integrale generale dell'equazione è del tipo

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y-4)} = \int \cot x dx + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Il secondo integrale è elementare mentre, ricorrendo ad una decomposizione in fratti semplici, possiamo riscrivere il primo nella forma

$$\frac{1}{3}\int_c^y \frac{du}{(u-4)} - \frac{1}{3}\int_c^y \frac{du}{(u-1)}.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{1}{3}\log\frac{|y-4|}{|y-1|} = \log|\sin x| + c$$

che definisce una soluzione generale in *forma implicita* dell'equazione differenziale.

c) Tenuto conto delle considerazioni svolte all'inizio sulla regolarità delle funzioni in gioco siamo sicuri che il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita nell'intorno $I = (\pi, 2\pi)$ di $3\pi/2$. Sostituendo valore iniziale e condizione iniziale nella soluzione generale dell'equazione determiniamo il valore della costante c:

$$\frac{1}{3}\log\frac{1}{4} = c$$

La soluzione del problema di Cauchy in forma implicita è allora data da:

$$\frac{1}{3}\log\frac{|y-4|}{|y-1|} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{4} = \log|\sin x|.$$

Per determinare la soluzione in *forma esplicita* del problema di Cauchy possiamo in primo luogo riscrivere la soluzione implicita come segue:

$$\frac{1}{3}\log 4\frac{|y-4|}{|y-1|} = \log|\sin x| \quad \Leftrightarrow \quad \log 4\frac{|y-4|}{|y-1|} = \log|\sin x|^3$$

da cui per la monotonia della funzione logaritmo anche

$$4\frac{|y-4|}{|y-1|} = |\sin x|^3.$$

Notiamo quindi che

$$y(3\pi/2) - 4 = 1 > 0$$

da cui, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno U di $3\pi/2$ in cui

$$y(x) - 4 > 0$$

per ogni $x \in U$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy se $x \in I$ non può mai essere $y(x) = 4$. Infatti, se per assurdo ciò accadesse la soluzione $y(x)$ intersecherebbe la soluzione costante $y = 4$ e per uno stesso punto passerebbero due soluzioni distinte dell'equazione differenziale. Quindi $y(x) - 4 > 0$ su tutto I! Da ciò consegue anche $y(x) - 1 > 0$ per ogni $x \in I$. In conclusione allora avremo

$$\frac{|y-4|}{|y-1|} = \frac{y-4}{y-1}.$$

per ogni $x \in I$. Ricordato che $I = (\pi, 2\pi)$ avremo anche

$$|\sin x|^3 = -\sin^3 x$$

da cui

$$4\frac{y-4}{y-1} = -\sin^3 x.$$

La soluzione in forma *esplicita* dell'equazione differenziale è ora facilmente ricavabile essendo:

$$y - 4 = \frac{1}{4}(1-y)\sin^3 x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{16+\sin^3 x}{4+\sin^3 x}.$$

Esercizio 40 *Trovare la soluzione del problema di Cauchy*

$$y' = \frac{y^2+2y-3}{(x+1)[3\log^2(x+1)+2]}$$

con $y(0) = 2$ *in forma implicita e esplicita.*

Soluzione. L'equazione differenziale è **a variabili separabili** e quindi la soluzione del problema di Cauchy in un intorno I di 0 si ottiene da

$$\int_2^y \frac{du}{u^2+2u-3} = \int_0^x \frac{dz}{(z+1)[3\log^2(z+1)+2]}.$$

Il primo integrale si risolve facilmente ricorrendo ad una decomposizione in fratti semplici:

$$\int_2^y \frac{du}{u^2+2u-3} = \frac{1}{4}\int_2^y \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4}\int_2^y \frac{du}{u+3} = \frac{1}{4}\log 5\cdot\frac{|y-1|}{|y+3|}.$$

Per risolvere il secondo integrale conviene ricorrere ad una sostituzione di variabili:

$$t = \log(z+1) \quad dt = \frac{dz}{z+1} \quad t_1 = \log 1 = 0 \quad t_2 = \log(x+1)$$

che conduce a

$$\int_0^{\log(x+1)} \frac{dt}{3t^2+2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big).$$

La soluzione in forma implicita del problema di Cauchy di partenza è allora data da:

$$\frac{1}{4}\log 5\cdot\frac{|y-1|}{|y+3|} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big).$$

Per esplicitare la soluzione osserviamo che

$$\log 5\cdot\frac{|y-1|}{|y+3|} = g(x)$$

dove si è posto

$$g(x) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\arctan\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big)$$

e che quindi

$$\frac{|y-1|}{|y+3|} = \frac{1}{5} e^{g(x)}.$$

Notiamo quindi che

$$y(0) - 1 = 1 > 0$$

da cui, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno U di 0 in cui

$$y - 1 > 0$$

e quindi, in U, anche $y + 3 > 0$. Osserviamo ancora che, come visto dettagliatamente in precedenza, per l'unicità del Problema di Cauchy non può mai essere $y = 1$ in I e quindi $y > 1$ su tutto I! In conclusione allora, in I, avremo che

$$\frac{|y-1|}{|y+3|} = \frac{y-1}{y+3}.$$

e quindi la soluzione in forma esplicita del problema di Cauchy è data da:

$$y(x) = \frac{5 - 3e^{g(x)}}{5 - e^{g(x)}}.$$

Esercizio 41 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

con $y(1) = 0$*.*

Soluzione. Per risolvere il problema di Cauchy osserviamo che si tratta di una equazione differenziale **lineare** del I ordine:

$$y' + a(x)y = f(x)$$

con $a(x) = 2/x$ e $f(x) = 2x/(x^2 + 2)$. La funzione $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ mentre $a(x)$ è definita e continua solo in di $\mathbb{R} - \{0\}$. Essendo il valore iniziale del problema di Cauchy 1 lavoreremo sempre nell'intervallo $I = (0, +\infty)$.

1. **Soluzione dell'equazione omogenea associata**. L'equazione differenziale omogenea associata è

   $$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 0$$

   e risulta a variabili separabili. Una sua soluzione (generale) si ricava da

   $$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x}$$

da cui, integrando, si ottiene

$$y_o(x) = c \cdot \frac{1}{x^2}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

2. **Determinazione di** y_P. Usando il metodo della variazione delle costanti sappiamo che una soluzione dell'equazione differenziale di partenza è del tipo

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{x^2}.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza avremo:

$$\frac{c'(x)}{x^2} = \frac{2x}{x^2+2} \quad \Rightarrow \quad c'(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$$

La soluzione dell'equazione differenziale si ricava da

$$\int dc = \int \frac{2x^3}{x^2+2}dx \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{2x^3}{x^2+2}dx.$$

dove l'ultimo integrale si risolve come segue

$$\int \frac{2x^3}{x^2+2}dx = \int 2xdx - \int \frac{4x}{x^2+2}dx = x^2 - 2\log(x^2+2) + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. In conclusione allora si ha:

$$c(x) = x^2 - 2\log(x^2+2) + k$$

da cui, dividendo per x^2, anche

$$y_p(x) = 1 - \frac{2}{x^2}\log(x^2+2) + \frac{k}{x^2}.$$

Per determinare il valore della costante k sostituiamo valore e condizione iniziale del problema di Cauchy:

$$y_p(1) = 1 - 2\log(3) + k = 0$$

da cui

$$k = 2\log 3 - 1 = \log 9e^{-1}.$$

Finalmente, a conti fatti, avremo

$$y_p(x) = \frac{1}{x^2}\log\frac{9e^{-1}}{(x^2+2)^2} + 1.$$

Una soluzione generale dell'equazione lineare di partenza è quindi data da

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2} \log \frac{9e^{-1}}{(x^2+2)^2} + 1.$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy sostituiamo nuovamente le condizioni iniziali:

$$y(1) = c = 0$$

da cui otteniamo la soluzione definitiva del problema di Cauchy che è data dalla funzione:

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \log \frac{9e^{-1}}{(x^2+2)^2} + 1.$$

Esercizio 42 *Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$y' = \frac{\sin x}{x^2+4} + y \cot x$$

con $y(2) = 0$*.*

Soluzione. Riscriviamo l'equazione differenziale di partenza nella forma

$$y' + a(x)y = f(x)$$

con $a(x) = -\cot x$ e $f(x) = \sin x/(x^2+4)$ ed osserviamo che si tratta di una equazione differenziale **lineare** del I ordine. La funzione $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ mentre $a(x)$ è definita e continua solo in un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$. Essendo il valore iniziale del problema di Cauchy 2 lavoriamo nell'intervallo $I = (0, \pi)$. Per risolvere il problema di Cauchy ci calcoliamo innanzitutto una soluzione *generale* dell'equazione lineare:

1. **Soluzione dell'equazione omogenea associata**. L'equazione differenziale omogenea associata è

   $$y' - y \cot x = 0$$

   e risulta a variabili separabili. Una sua soluzione $y_o(x)$ si ottiene, come visto in precedenza, da

   $$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx \quad \Rightarrow \quad y_o(x) = c \sin x$$

   con $c \in \mathbb{R}$ e dove, per giungere al risultato, si è sfruttata la monotonia della funzione logaritmo.

2. **Soluzione** y_p. Dal metodo della variazione delle costanti ci è noto che una soluzione dell'equazione differenziale è del tipo

$$y_p(x) = c(x)\sin x.$$

Per determinare la funzione $c(x)$ sostituiamo $y_p(x)$ nell'equazione differenziale iniziale:

$$c'(x)\sin x + c(x)\frac{\sin x}{\sin x}\cos x - c(x)\sin x \cot x = \frac{\sin x}{x^2+4}$$

da cui, dopo qualche semplificazione, si ottiene l'equazione differenziale

$$c'(x) = \frac{1}{x^2+4}.$$

La sua soluzione generale si ricava come segue

$$\int dc = \int \frac{1}{x^2+4}dx$$

da cui

$$c(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + k.$$

Per determinare il valore della costante k sostituiamo le condizioni iniziali del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{2}\arctan 1 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{\pi}{8}.$$

e quindi

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin x.$$

Come noto la soluzione generale dell'equazione differenziale di partenza è data allora dalla somma della soluzione dell'omogenea con $y_p(x)$:

$$y(x) = c\sin x + \left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin x.$$

A questo punto possiamo risolvere il problema di Cauchy sostituendo nuovamente le condizioni iniziali

$$y(2) = c = 0$$

da cui finalmente

$$y(x) = \frac{\sin x}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{\pi\sin x}{8}.$$

9 Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 43 *Calcolare in forma algebrica tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^7|z|^5 - iz^4 = 0.$$

Soluzione. Utilizziamo la rappresentazione esponenziale di un numero complesso

$$z = \rho e^{i\theta}$$

con $\rho \geq 0$. Sostituendo nell'equazione di partenza ed utilizzando le proprietà della funzione esponenziale nel campo complesso si ha

$$\rho^7 e^{7i\theta} \rho^5 = i\rho^4 e^{4i\theta}$$

Osservato che

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

sostituendo ed eseguendo i calcoli si ottiene l'equazione

$$\rho^{12} e^{7i\theta} = \rho^4 e^{i(4\theta+\frac{\pi}{2})}$$

Si distinguono due casi:

1. $\rho = 0$: in questo caso la soluzione dell'equazione è rappresentata dal numero complesso $w_0 = 0$.

2. $\rho = 1$: in questo caso l'equazione si riduce a

$$e^{7i\theta} = e^{i(4\theta+\frac{\pi}{2})} \Rightarrow 7\theta = 4\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Se restringiamo gli argomenti all'intervallo $0 \leq \theta < 2\pi$ otteniamo i tre valori

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}\ (k=0), \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}\ (k=1), \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}\ (k=2)$$

Le soluzioni dell'equazione sono allora date dai tre numeri complessi:

$$w_1 = e^{i\theta_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad w_2 = e^{i\theta_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad w_3 = e^{i\theta_3} = -i$$

Osserviamo che le tre soluzioni sono i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio unitario di Figura 9.

Esercizio 44 *Sapendo che $z = 3i$ è radice del polinomio*

$$P(z) = z^3 - 3iz^2 + \lambda z - 24i + 18$$

trovare λ e le rimanenti radici di $P(z)$ in forma algebrica.

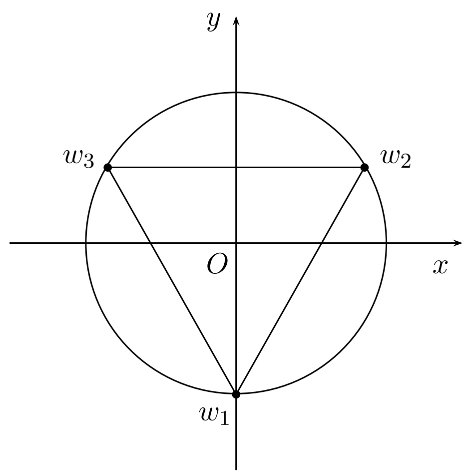

Figura 3: soluzioni nel piano di Gauss

Soluzione. Iniziamo l'esercizio determinando il valore di λ. Sapendo che $z = 3i$ è una radice di $P(z)$ si ha:

$$P(3i) = -27i + 27i + 3i\lambda - 24i + 18 = 0$$

da cui si calcola che $\lambda = 8 + 6i$. Sappiamo dal Teorema Fondamentale dell'Algebra che $P(z)$ ammette tre radici complesse, contate tenendo conto della loro molteplicità . Per determinarle osserviamo innanzitutto che, tramite opportuni raccoglimenti a fattor comune, $P(z)$ si può fattorizzare come segue

$$P(z) = z^2(z - 3i) + (z - 3i)(8 + 6i) = (z - 3i)(z^2 + 8 + 6i).$$

Dalla legge di annullamento del prodotto consegue che $P(z)$ si annulla solamente nel caso in cui almeno uno dei due fattori è nullo. Il primo fattore si annulla per $z = 3i$ e ciò non costituisce una sorpresa visto che era noto fin dall'inizio che $z_0 = 3i$ era una radice di $P(z)$. Per determinare le rimanenti due radici risolviamo nel campo complesso l'equazione

$$z^2 + 8 + 6i = 0$$

le cui soluzioni sono le radici quadrate del numero complesso $w = -8 - 6i$. Osservato che $|w| = 10$ possiamo scrivere

$$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\Big(-\frac{4}{5} - i\frac{3}{5}\Big)$$

e calcolare le due radici quadrate di w scrivendo

$$z_1 = \sqrt{|w|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right) = -z_1$$

Ricordando le formule di bisezione possiamo calcolare

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

da cui si ha

$$z_1 = \sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + 3\frac{\sqrt{10}}{10}i\right) = -1 + 3i$$

Il calcolo di z_2 è immediato

$$z_2 = -z_1 = 1 - 3i.$$

Esercizio 45 *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$|z + 3i| = ||z| - 3|$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Soluzione. Osserviamo per cominciare che essendo primo e secondo membro dell'equazione moduli di un numero complesso (quindi quantità reali non negative) l'equazione di partenza è equivalente a quella ottenuta passando ai quadrati

$$|z + 3i|^2 = ||z| - 3|^2$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$x^2 + (3 + y)^2 = |\sqrt{x^2 + y^2} - 3|^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ricordando che la radice quadrata di un numero reale è sempre definita non negativa è chiaro che l'equazione precedente ha soluzioni solo se $y \leq 0$. Fatta questa osservazione, elevando membro a membro al quadrato l'ultima equazione, si ottiene

$$y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 0$$

da cui $x = 0$. La rappresentazione grafica delle soluzioni nel piano di Gauss è data dalla semiretta evidenziata in Figura 4.

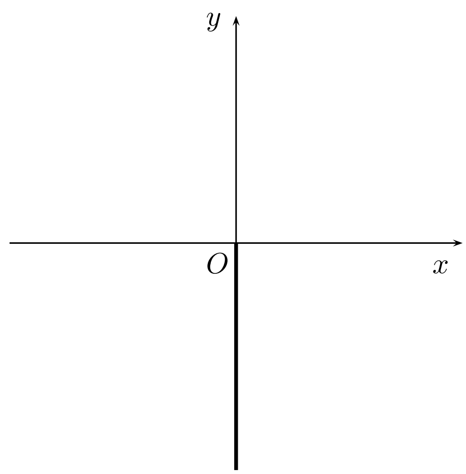

Figura 4: soluzioni nel piano di Gauss

Esercizio 46 *Sia data la funzione* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definita da*

$$f(z) = i(2\bar{z} - |z + 2i|^2) + 5.$$

1. *Trovare l'insieme degli* $z \in \mathbb{C}$ *tali che* $Im\, f(z) = 0$ *e* $Re\, f(z) \leq 0$ *e disegnarlo nel piano di Gauss.*
2. *Calcolare in forma algebrica le radici quarte di* $[f(-5i/2)]^4$

Soluzione. Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, osserviamo che

$$f(x+iy) = i(2x - 2iy - x^2 - (y+2)^2) + 5 = 2y + 5 + i(2x - x^2 - (y+2)^2)$$

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\ f(z) = (2x - x^2 - (y+2)^2) = 0 \\ \mathrm{Re}\ f(z) = 2y + 5 \leq 0 \end{cases}$$

La prima equazione si può riscrivere nella forma più espressiva

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

da cui possiamo comprendere come le sue soluzioni siano rappresentate nel piano di Gauss da una circonferenza di centro $z_c = 1 - 2i$ e raggio unitario. La seconda disequazione ha soluzioni che si rappresentano nel piano di

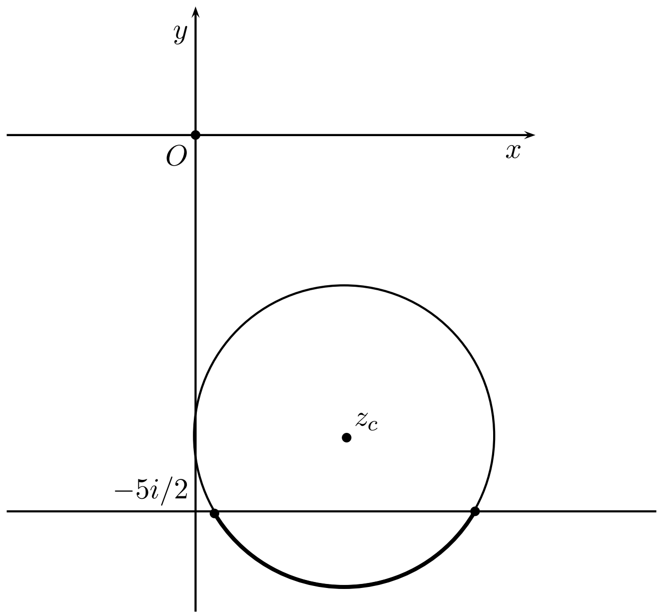

Figura 5: rappresentazione nel piano di Gauss

Gauss con i punti del semipiano "inferiore" delimitato dalla retta orizzontale passante per il punto $w = -5i/2$ (retta compresa). La soluzione del sistema allora è rappresentata dall'arco di circonferenza di Figura 5.

Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo in primo luogo il valore assunto dalla funzione f nel punto w. Per accelerare i calcoli, evitando il calcolo esplicito del valore di f in w, possiamo osservare che in corrispondenza di questo valore si ha

$$\begin{cases} \text{Im } f(w) = -(y+2)^2 = -\frac{1}{4} \\ \text{Re } f(w) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$f(w) = -\frac{1}{4}i$$

Si tratta ora di calcolare in forma algebrica le radici quarte del numero complesso $f^4(w)$. A questo punto osserviamo che non si deve dimenticare che stiamo lavorando nel piano complesso e che quindi si tratta di calcolare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \left(-\frac{1}{4}i\right)^4$$

L'equazione si può scrivere nella forma

$$z^4 - a^4 = 0$$

con $a = -i/4$. Per risolverla possiamo osservare che il primo membro ammette la seguente fattorizzazione:

$$z^4 - a^4 = (z^2 - a^2)(z^2 + a^2) = (z - a)(z + a)(z + ia)(z - ia)$$

da cui, per la legge di annullamento del prodotto, ricaviamo le seguenti quattro soluzioni:

$$z_1 = a = -\frac{i}{4} \quad z_2 = -a = \frac{i}{4} \quad z_3 = -ia = \frac{1}{4} \quad z_4 = ia = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 47 *Si consideri la funzione*

$$f(z) = \frac{9(z + \bar{z} + 4)}{|z|}$$

dove $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. *Si calcolino quindi:*

1. *il valore assunto dalla funzione in* $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$*;*
2. *le soluzioni (in forma algebrica) dell'equazione*

   $$z^3 = f(z_0)$$

   dandone una rappresentazione nel piano di Gauss.

Soluzione. Per rispondere alla prima domanda calcoliamo

$$f(z_0) = \frac{9(1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} + 4)}{\sqrt{1+3}} = 27.$$

Si tratta allora di risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^3 = 27 \Leftrightarrow z^3 - 27 = 0$$

Prima di procedere al calcolo osserviamo che si tratta di un'equazione algebrica di terzo grado e che il polinomio associato è a coefficienti reali. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra ci attendiamo allora tre soluzioni (contate con la loro molteplicità) e, tenuto conto del fatto che il polinomio associato è a coefficienti reali, una di queste sarà un numero reale. La soluzione reale si vede immediatamente che è $z_1 = 3$. Possiamo sfruttare questa osservazione per riscrivere l'equazione di partenza nella forma fattorizzata:

$$(z - 3)(z^2 + 3z + 9) = 0$$

da cui si comprende che le rimanenti due soluzioni si determinano risolvendo nel campo complesso l'equazione di secondo grado

$$z^2 + 3z + 9 = 0.$$

Il discriminante dell'equazione è $\Delta = -27$ e, ricorrendo alla formula risolutiva dell'equazione di secondo grado, si determinano le due soluzioni:

$$z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad z_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Osserviamo che come ci si attende le soluzioni sono complesse coniugate!

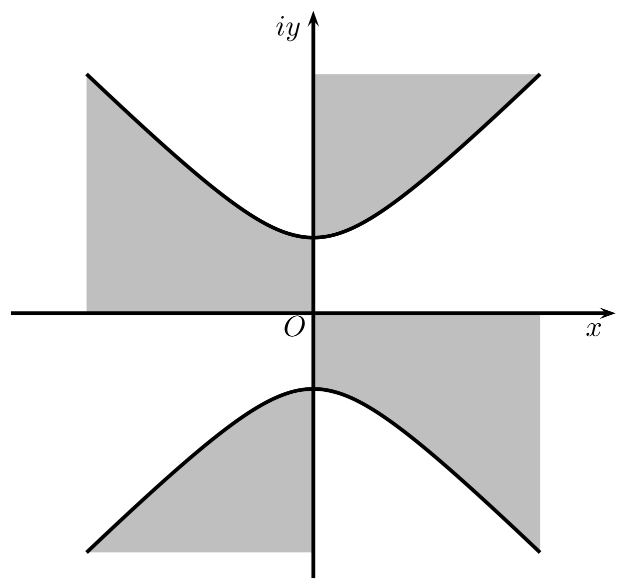

Figura 6: rappresentazione grafica delle soluzioni

Esercizio 48 *Risolvere la disequazione*

$$Im\ (2z^2)(Re\ (z^2) + 1) \leq 0$$

con $z \in \mathbb{C}$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

Soluzione. Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, riscriviamo la disequazione nella forma

$$4xy \cdot (x^2 - y^2 + 1) \leq 0 \Leftrightarrow xy \cdot (x^2 - y^2 + 1) \leq 0.$$

Possiamo determinare le soluzioni in due momenti:

1. se $xy \leq 0$ si avranno soluzioni se

$$x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq x^2 + 1.$$

Più precisamente, se $x \leq 0 \wedge y \geq 0$ (II quadrante) avremo

$$0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$$

mentre se $x \geq 0 \wedge y \leq 0$ (IV quadrante) avremo

$$-\sqrt{x^2 + 1} \leq y \leq 0.$$

2. se $xy \geq 0$ si avranno soluzioni se

$$x^2 - y^2 + 1 \leq 0$$

e le soluzioni, che si ottengono con lo stesso procedimento visto sopra, sono rappresentate in Figura 6.

Osserviamo che per rappresentare graficamente le soluzioni si è utilizzato il fatto che i grafici delle funzioni

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$$

sono opportuni rami di iperbole!

Esercizio 49 *Disegnare nel piano di Gauss l'insieme X degli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano la relazione*

$$\sqrt{\frac{1 - |z - 1|}{1 - |z - i|}} < 1.$$

Soluzione. Il corpo $\mathbb{C}$ non è ordinato e quindi l'insieme dei numeri complessi che soddisfano la disequazione data sarà necessariamente un sottoinsieme dei valori $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{1 - |z - 1|}{1 - |z - i|} \geq 0.$$

Osserviamo che l'equazione $|z - i| = 1$ individua tutti punti del piano di Gauss che appartengono alla circonferenza[1] ∂C di centro i e raggio unitario. Procediamo allora distinguendo due casi:

1. se $|z - i| < 1$ (punti del cerchio C) si ha che

$$\frac{1 - |z - 1|}{1 - |z - i|} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z - 1| \leq 1$$

[1]Dato un cerchio C indicheremo la circonferenza che lo delimita con il simbolo ∂C. L'unione di cerchio e circonferenza verrà indicata con $\bar{C} = C \cup \partial C$.

che individua tutti i punti del cerchio $\bar{B}$ di centro 1 e raggio unitario. Allora

$$\sqrt{\frac{1-|z-1|}{1-|z-i|}} < 1 \Leftrightarrow |z-1| > |z-i| \Leftrightarrow |z-1|^2 > |z-i|^2$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$(x-1)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < y.$$

Quindi i numeri complessi che risolvono la disequazione saranno i punti dell'insieme $\bar{B} \cap C$ con $x < y$ (area grigia di Figura 1).

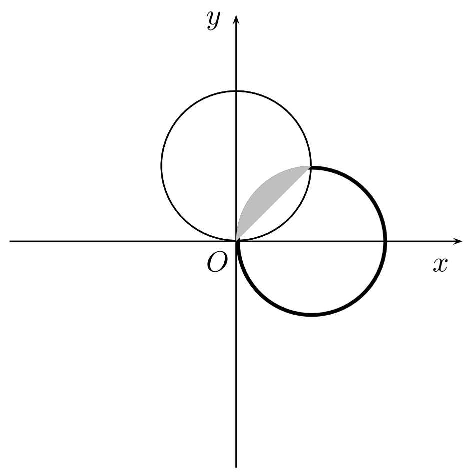

Figura 7: insieme X

2. se $|z-i| > 1$ (punti esterni al cerchio $\bar{C}$) si ha che

$$\frac{1-|z-1|}{1-|z-i|} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-1| \geq 1$$

che individua tutti i punti esterni al cerchio B. Allora

$$\sqrt{\frac{1-|z-1|}{1-|z-i|}} < 1 \Leftrightarrow |z-1| < |z-i| \Leftrightarrow |z-1|^2 < |z-i|^2$$

Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$(x-1)^2 + y^2 < x^2 + (y-1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > y.$$

Quindi i numeri complessi che verificano la disequazione saranno i punti esterni sia al cerchio $\bar{C}$ che al cerchio B con $x > y$. Il disegno nel piano di Gauss è lasciato al lettore.

Indice

Riferimenti bibliografici

[1] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel Zanichelli, Bologna, 1996.

[2] O. Stefani A. Zanardo, *MA...*, Libreria Cortina, Padova, 2005.

[3] O. Stefani A. Zanardo, *Limiti*, Libreria Cortina, Padova, 2005.