Appello del 5/3/2011 - fila A

Esercizio 1

Utilizziamo la sostituzione

$$\sin x = t \qquad x=\frac{\pi}{2} \to t=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\cos x\, dx = dt \qquad x=\pi \to t=\sin\pi=0$$

ottenendo

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{\sin^2 x -2}\, dx = \int_1^0 \frac{t^3}{t^2-2}\, dt = -\int_0^1 \frac{(t^3-2t)+2t}{t^2-2}\, dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{t\cancel{(t^2-2)}}{\cancel{t^2-2}} + \frac{2t}{t^2-2}\right) dt$$

$$= -\left[\frac{t^2}{2} + \log|t^2-2| \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \log 2$$

Esercizio 2

Utilizzeremo il criterio del confronto asintotico e confronteremo la serie data con $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{10\alpha^4+1}}$; si noti che entrambe le serie sono a termini positivi e dunque è possibile utilizzare il criterio. Poiché

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{K^3}{K^4+1}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{K+K^2}{K^7+4}\right)\right]^{\alpha^4}}{1/K^{10\alpha^4+1}} =$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{K^3}{K^4+1}}{1/K} \cdot \left[\frac{1-\cos\left(\frac{K+K^2}{K^7+4}\right)}{1/K^{10}} \right]^{\alpha^4}$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \underbrace{\frac{K^4}{K^4+1}}_{\to 1} \cdot \left[\underbrace{\frac{1-\cos\left(\frac{K+K^2}{K^7+4}\right)}{\left(\underbrace{\frac{K+K^2}{K^7+4}}_{\to 0}\right)^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\frac{K+K^2}{K^7+4}}{\frac{1}{K^5}}\right)^2}_{\to 1} \right]^{\alpha^4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha^4} \in (0,+\infty)$$

il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^3}{K^4+1}\left[1-\cos\left(\frac{K+K^2}{K^7+4}\right)\right]^{\alpha^4}$$ è convergente (divergente)

$$\Longleftrightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{10\alpha^4+1}}$$ è conv. (div.)

$$\Longleftrightarrow 10\alpha^4+1 \underset{(\leq)}{>} 1 \Longleftrightarrow \alpha^4 \underset{(\leq)}{>} 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \underset{(=)}{\neq} 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{ricordiamo che } \alpha^4 \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha^4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0\end{array}\right)$$

la serie data risulta dunque convergente per $\alpha \neq 0$ e divergente per $\alpha = 0$.

Esercizio 3

La funzione f è continua in quanto composizione di funzioni continue (si noti che l'argomento del logaritmo è sempre positivo) e dunque assume massimo e minimo assoluti su D per il teorema di Bolzano-Weierstrass in quanto D è chiuso e limitato.

- Cominciamo cercando candidati max/min nella parte interna $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 16\}$.

Notiamo che
$$f'_x(x,y) = 1 + \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Le due derivate parziali di f sono continue e pertanto, per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile su $\mathring{D}$. Possiamo dunque limitarci a cercare punti critici su $\mathring{D}$:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = 0$$
$$\Rightarrow x = -1$$

Il punto critico $(-1,0)$ appartiene a $\mathring{D}$ ed è dunque un candidato max/min.

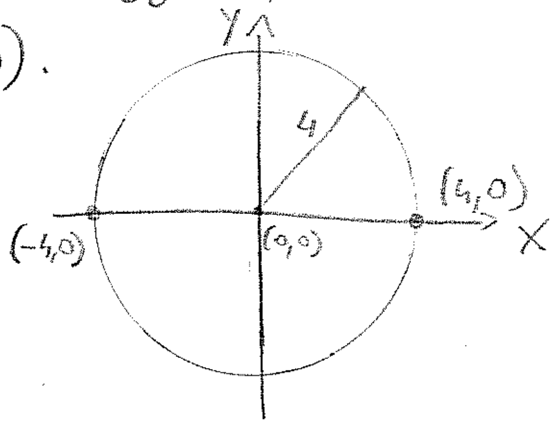
• Cerchiamo ora candidati max/min nel bordo di D

$$\partial D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 16 \}$$

Su tale insieme si ha

$$f(x,y) = x + \log(1+x^2+y^2) = x + \log(1+16)$$
$$= x + \log 17 \qquad \forall (x,y) \in \partial D.$$

È dunque sufficiente capire quali sono i punti su ∂D che massimizzano/minimizzano il valore della prima coordinata x. Poiché ∂D è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 4, tali punti sono evidentemente $(4,0)$ e $(-4,0)$.



• Abbiamo
$$f(-1,0) = -1 + \log 2$$
$$f(4,0) = 4 + \log 17$$
$$f(-4,0) = -4 + \log 17$$

Poiché a) $-1 + \log 2 < 4 + \log 17$ (evidente)

b) $-1 + \log 2 > -4 + \log 17 \iff 3 > \log 17 - \log 2 = \log \frac{17}{2}$

(vero per ipotesi)

si ha che $f(-4,0) < f(-1,0) < f(4,0)$.

Dunque $(4,0)$ e $(-4,0)$ sono, rispettivamente, punti di massimo e minimo assoluto.

Esercizio 4

$$\int_3^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty} \int_3^{\omega} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty} \int_3^{\omega} \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \Big[\log|t-1| - \log|t+1|\Big]_3^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_3^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \left[\log\Bigg|\underbrace{\frac{\omega-1}{\omega+1}}_{\to 1}\Bigg| - \log\frac{1}{2}\right]$$

$$= 0 - \log\frac{1}{2} = \log 2$$

Esercizio 5 (terza parte)

Poiché

$$\lim_{K\to+\infty} \left|(-1)^K \log(1+K^2)\right| = \lim_{K\to+\infty} \log(1+K^2) = +\infty$$

si ha che la condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta (abbiamo implicitamente usato il fatto che $\lim_{K\to\infty} a_K = 0 \iff \lim_{K\to\infty} |a_K| = 0$).

La serie data non può dunque essere convergente.

Esercizio 6

Passando alle coordinate polari notiamo che

$$\lim_{\rho\to 0^+} |f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| = \lim_{\rho\to 0^+} \left| \frac{44\rho^6\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta + 7\rho^6\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta}{\rho^2} \right|$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \underbrace{\rho^4}_{\to 0} \underbrace{\left|44\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta + 7\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta\right|}_{\text{limitato } (\text{è} \le 44+7=51)} = 0.$$

dunque f è continua in $(0,0)$. Poiché f è evidentemente continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (in quanto composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) possiamo affermare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.