Istituzioni di Analisi Matematica 2
Appello del 27/6/2011 - fila A

ESERCIZIO 1

Utilizzando le formule di duplicazione otteniamo

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{2+\tan\frac{x}{2}}{\sin x}\,dx = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] dx$$

$$= \left[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| + 2\log\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3}$$

$$= \left[2\log\Bigg|\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}_{=\tan\frac{x}{2}}\Bigg| + \tan\frac{x}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3}$$

$$= 2\log\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\log 1 - 1$$

$$= \log 3 + \sqrt{3} - 1.$$

Abbiamo utilizzato le uguaglianze

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

[In alternativa era possibile utilizzare la sostituzione $\tan\frac{x}{2} = t$.]

ESERCIZIO 2

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{K\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{K+1+\sqrt{K+1}}\left(\frac{4x^2}{3+x^2}\right)^{K+1}}{\frac{1}{K+\sqrt{K}}\left(\frac{4x^2}{3+x^2}\right)^{K}}\right| = \Big|\underbrace{\frac{4x^2}{3+x^2}}_{>0}\Big|\cdot\lim_{K\to+\infty}\frac{K+\sqrt{K}}{K+1+\sqrt{K+1}}$$

$$= \frac{4x^2}{3+x^2}\lim_{K\to\infty}\left(\frac{K+\sqrt{K}}{K}\cdot\frac{K}{K+1+\sqrt{K+1}}\right) = \frac{4x^2}{3+x^2}$$

Per il criterio del rapporto, la serie è assolutamente convergente se $\frac{4x^2}{3+x^2}<1$, cioè se $4x^2<3+x^2$, cioè se $3x^2<3$, cioè se $x^2<1$.

In definitiva abbiamo che:

- se $-1<x<1$, allora la serie è assolutamente convergente
- se $x>1$ oppure $x<-1$, allora $\frac{4x^2}{3+x^2}>1$ e la serie non può essere convergente. Essendo a termini positivi, essa è divergente.

Bisogna ora analizzare i due casi rimanenti: $x=1$ e $x=-1$.
In entrambi si ottiene $x^2=1$ e la serie da studiare diventa

$$(*)\quad \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K+\sqrt{K}}$$

Notiamo che

$$\frac{1}{K+\sqrt{K}} \geq \frac{1}{K+K} = \frac{1}{2K} > 0 \qquad \forall K\geq 1.$$

Possiamo allora applicare il criterio del confronto per serie a termini positivi per dedurre che la serie $(*)$ è divergente in quanto $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2K}$ è divergente.

In conclusione, la serie è convergente per $x\in(-1,1)$
divergente se $x\geq 1$ o $x\leq -1$.

ESERCIZIO 3. f ammette massimo e minimo assoluto su D in quanto è continua e D è chiuso e limitato.

Cominciamo cercando candidati max/min nella parte interna

$$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 3,\ -2 < y < 2\}.$$

Notiamo che

$$f'_x(x,y) = 2x(y+1), \qquad f'_y(x,y) = x^2 - 1.$$

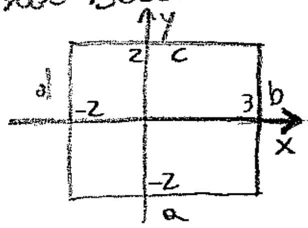
Ne segue che le derivate parziali di f sono continue e, per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in $\mathring{D}$.

Possiamo dunque limitarci a cercare i punti critici di f in $\mathring{D}$:

$$\begin{cases} 2x(y+1) = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1 \end{cases} \qquad \nearrow \ \pm 2(y+1) = 0 \ \rightarrow \ y = -1$$

Abbiamo dunque due punti critici: $(1,-1)$ e $(-1,-1)$.

Passiamo ora alla ricerca di candidati max/min sul bordo di D, che è costituito dai 4 lati di un rettangolo:



a) sul lato $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 3,\ y = -2\}$ studiamo la funzione $h(x) = f(x,-2) = -x^2 + 2$.

Sull'intervallo $[-2,3]$, h assume massimo in $x=0$ e minimo in $x=3$. Abbiamo dunque i due candidati $(0,-2)$ e $(3,-2)$

b) sul lato $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3,\ -2 \le y \le 2\}$ studiamo

$$h(y) = f(3,y) = 8y + 9$$

Sull'intervallo $[-2,2]$, h assume massimo in $y=2$ e minimo in $y=-2$. Abbiamo dunque i due candidati $(3,2)$ e $(3,-2)$.

c) sul lato $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 3,\ y = 2\}$ studiamo

$$h(x) = f(x,2) = 3x^2 - 2$$

Sull'intervallo $[-2,3]$ h assume massimo in $x=3$ e minimo in $x=0$. Abbiamo dunque i due candidati $(0,2)$ e $(3,2)$.

d) Sul lato $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-2,\ -2\le y\le 2\}$ studiamo
$$h(y)=f(-2,y)=3y+4$$
che, sull'intervallo $[-2,2]$, assume massimo in $y=2$ e minimo in $y=-2$. Abbiamo dunque i due candidati $(-2,2)$ e $(-2,-2)$.

Confrontando i valori della funzione nei vari punti otteniamo

$f(1,-1)=1$	$f(3,2)=25$ MAX
$f(-1,-1)=1$	$f(0,2)=-2$
$f(0,-2)=2$	$f(-2,2)=10$
$f(3,-2)=-7$ MIN	$f(-2,-2)=-2$

ESERCIZIO 4

- Integrando per parti otteniamo
$$\int \frac{\log x}{x^4}\,dx=-\frac{\log x}{3x^3}+\int\frac{1}{3x^4}\,dx=-\frac{\log x}{3x^3}-\frac{1}{9x^3}=-\frac{1+3\log x}{9x^3}$$
e dunque una primitiva di $\frac{\log x}{x^2}$ è data da $-\frac{1+3\log x}{9x^3}$.
- In particolare
$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^4}\,dx=\lim_{\omega\to+\infty}\left(\int_1^{\omega}\frac{\log x}{x^4}\,dx\right)=\lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{1+3\log x}{9x^3}\Bigg|_1^{\omega}\right)$$
$$=\lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{1}{9\omega^3}-\frac{\log\omega}{3\omega^3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}.$$

ESERCIZIO 5

Poiché
- $e^{1/\sqrt{K}}-1>0 \quad \forall K\ge 1$
- $\lim_{K\to+\infty}\left(e^{1/\sqrt{K}}-1\right)=0$
- $e^{\frac{1}{\sqrt{K+1}}}-1<e^{\frac{1}{\sqrt{K}}}-1 \quad \forall K\ge 1$ (si noti che la funzione esponenziale è crescente, dunque è sufficiente notare che $\frac{1}{\sqrt{K+1}}<\frac{1}{\sqrt{K}}$)

le ipotesi del criterio di Leibnitz sono soddisfatte e, dunque, la serie data è convergente.