Istituzioni di Analisi Matematica 2

Appello del 30/3/2011 - fila A

ESERCIZIO 1

Integrando due volte per parti ricaviamo

$$\int (x+2)(\log x)^2\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)(\log x)^2 - \int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)(\log x)^2 - \int (x+4)(\log x)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)(\log x)^2 - \left[\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\log x - \int\left(\frac{x^{\cancel{2}}}{2}+4\cancel{x}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right]$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)(\log x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\log x + \frac{x^2}{4}+4x+C.$$

ESERCIZIO 2

La serie data è a termini definitivamente positivi, infatti

- $\lim_{k\to+\infty}\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}=0^+ \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\sin\left(\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}\right)=0^+$
- $1+\frac{1}{k^2}>1\quad\forall k\geq 1 \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)>0\quad\forall k\geq 1$

Poiché

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}\right)\left[\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right]^\alpha}{\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}\right)}{\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{3+k^2}{k^4+2k^3}}{\frac{1}{k^2}}}_{\to 1}\cdot\left[\underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}}_{\to 1}\right]^\alpha = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico abbiamo che la serie in questione è convergente se e solo se

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2+2\alpha}}\text{ è convergente} \iff 2+2\alpha>1 \iff \alpha>-\frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 3.

Poiché $f'_x(x,y) = -2x+8x^3$

$f'_y(x,y) = 2(e^y-e)e^y$,

le derivate parziali f'_x e f'_y di f sono continue; dunque f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e quindi differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Gli estremi relativi vanno dunque cercati tra i punti critici di f:

$$\begin{cases} -2x+8x^3 = 2x(4x^2-1) = 0 \\ 2(e^y-e)\underbrace{e^y}_{>0} = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$x = 0$ oppure $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

I punti critici di f sono dunque i punti $(0,1)$, $(\frac{1}{2},1)$ e $(-\frac{1}{2},1)$.

La matrice Hessiana di f è $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2+24x^2 & 0 \\ 0 & 2e^ye^y+2(e^y-e)e^y \end{pmatrix}$

Notiamo, in particolare, che le quattro derivate parziali del second'ordine di f sono continue; dunque f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$ e quindi due volte differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Poiché

$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2e^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = -4e^2 < 0$

$Hf(\frac{1}{2},1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2e^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = 8e^2 > 0$

$Hf(-\frac{1}{2},1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2e^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = 8e^2 > 0$

matrici definite positive

abbiamo che i punti $(\frac{1}{2},1)$ e $(-\frac{1}{2},1)$ sono minimi relativi forti mentre $(0,1)$ è un punto di sella.

ESERCIZIO 4.

Poiché la funzione $\arctan(e^t)$ è continua abbiamo

$$F'(x) = (\arctan(e^{x^2}))(x^2)' - (\arctan e^{\sin x})(\sin x)'$$
$$= 2x \arctan e^{x^2} - \cos x \cdot \arctan e^{\sin x}.$$

ESERCIZIO 5

Poiché

- $0 \leq \frac{|\sin(x+e^x)|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} \quad \forall x \geq 1$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ è convergente,

il criterio del confronto per integrali impropri garantisce che anche $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+e^x)|}{x^4} dx$ è convergente.

[Ad essere precisi, bisognerebbe anche far notare che la funzione $\frac{|\sin(x+e^x)|}{x^4}$ è continua su $[1,+\infty)$ e dunque integrabile secondo Riemann su $[1,\omega]$ per ogni $\omega \in (1,+\infty)$.]

Per quanto riguarda

- la prima parte dell'esercizio 4;
- la prima parte dell'esercizio 5;
- l'esercizio 6

rimandiamo al file di enunciati e definizioni per l'esame scritto disponibile tra il materiale didattico della pagina web del corso.