Appello 7/9/2012 - Soluzioni compito A

ESERCIZIO 1 - a)

Utilizzando la sostituzione

$$x^2 = t \qquad\qquad x=1 \to t=1$$
$$2x\,dx = dt \qquad\qquad x=3 \to t=9$$

otteniamo

$$\int_1^3 x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \underbrace{2x}\cdot x^2 \cdot e^{-x^2} \underbrace{dx}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^9 t e^{-t} dt \qquad \text{(per parti)}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-t e^{-t}\Big|_1^9 + \int_1^9 e^{-t} dt \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-t}(t+1) \right]_1^9$$
$$= -5e^{-9} + e^{-1}.$$

ESERCIZIO 2

Poiché $2x^2-5x+2 = (2x-1)(x-2)$, la funzione

$$f(x) := \left(\frac{1}{(x-2)(2x^2-5x+2)} \right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{(x-2)^2(2x-1)} \right)^{\alpha}$$

presenta due singolarità: $x=\frac{1}{2}$ (fuori dal dominio di integrazione) e $x=2$ (che fa parte del dominio di integrazi. Inoltre, l'intervallo di integrazione si estende a $+\infty$. Pertanto, l'integrale in oggetto risulterà convergente se e solo se i due integrali impropri

$$\int_2^3 f(x)\,dx \qquad e \quad \int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$

sono convergenti.

Cominciamo con $\int_2^3 f(x)dx$. Poiché

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left(\frac{1}{(x-2)^2(2x-1)}\right)^\alpha}{\frac{1}{(x-2)^{2\alpha}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2x-1)^\alpha} = \frac{1}{3^\alpha} > 0$$

e dato che le funzioni in questione sono $\overbrace{\text{positive}}^{\text{continue e}}$ (in un intorno destro di $x=2$), possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e ottenere che

$$\int_2^3 f(x)\,dx \text{ è } \underset{(\text{divergente})}{\text{convergente}} \iff \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{2\alpha}}\,dx \text{ è } \underset{(\text{div.})}{\text{conv.}}$$

$$\iff 2\alpha < 1 \quad (2\alpha \geq 1)$$

$$\iff \alpha < \frac{1}{2} \quad \left(\alpha \geq \frac{1}{2}\right)$$

Passiamo a $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{(x-2)^2(2x-1)}\right)^\alpha}{\frac{1}{x^{3\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{(x-2)^2(2x-1)}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha > 0$$

e dato che le funzioni in questione sono $\overbrace{\text{positive}}^{\text{continue e}}$ in $[3,+\infty[$, il criterio del confronto asintotico dà

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \text{ è } \underset{(\text{div.})}{\text{conv.}} \iff \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3\alpha}}\,dx \text{ è } \underset{(\text{div.})}{\text{conv.}}$$

$$\iff 3\alpha > 1 \quad (3\alpha \leq 1)$$

$$\iff \alpha > \frac{1}{3} \quad \left(\alpha \leq \frac{1}{3}\right)$$

In conclusione: l'integrale proposto è convergente se e solo se valgono sia $\alpha < \frac{1}{2}$ che $\alpha > \frac{1}{3}$; in altre parole, è convergente se e solo se $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 3

a) Poiché le derivate parziali

$$f'_x(x,y) = 2xy + 2y^2 - 2y = 2y(x+y-1)$$
$$f'_y(x,y) = x^2 + 4xy - 2x = x(x+4y-2)$$

sono continue, f risulta di classe C^1 (e quindi differenziabile) su $\mathbb{R}^2$. Eventuali estremi relativi vanno dunque cercati tra i punti critici di f, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2y(x+y-1) = 0 \\ x(x+4y-2) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha due soluzioni:

- $y = 0$, caso in cui la seconda diventa
$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$
- $y = 1-x$, caso in cui la seconda diventa
$$x(x+4(1-x)-2) = x(-3x+2) = 0$$
da cui $x = 0$ (e $y = 1$) oppure $x = \frac{2}{3}$ (e $y = \frac{1}{3}$).

Abbiamo pertanto 4 punti critici:

$$(0,0),\ (2,0),\ (0,1) \text{ e } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Ora, le derivate del secondo ordine

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+4y-2 \\ 2x+4y-2 & 4x \end{pmatrix}$$

sono continue; pertanto f è di classe C^2 (e quindi differenziabile due volte) su $\mathbb{R}^2$ e possiamo applicare il criterio della matrice Hessiana:

$$\left.\begin{aligned} Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ Hf(2,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ Hf(0,1) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ hanno det} < 0\text{, dunque sono matrici non definite}$$

$$Hf\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 8/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ha det} = \frac{4}{3} > 0\text{, la matrice è definita positiva}$$

Pertanto, i punti $(0,0), (2,0)$ e $(0,1)$ sono di sella, mentre $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è (l'unico) minimo relativo (forte). Non ci sono massimi relativi.

b) Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,1) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,-1) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 + 4x = -\infty$$

abbiamo che $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$. Pertanto, f non può assumere né massimo né minimo assoluto.

ESERCIZIO 4

b) La serie è a termini di segno alterno. Poiché

- $\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \geq \log 1 = 0 \quad \forall K \geq 1$ ($\log$ è crescente)
- $\lim_{K \to +\infty} \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right) = 0$
- $\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K+1}}\right) \leq \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \quad \forall K \geq 1$

  ($\log$ è crescente e $1+\frac{1}{\sqrt{K+1}} < 1+\frac{1}{\sqrt{K}}$)

il criterio di Leibnitz assicura che la serie $\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ è convergente

d) La serie è assolutamente convergente se

$$\sum_{K=1}^{\infty} \left|(-1)^K \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\right| = \sum_{K=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \quad (*)$$

è convergente. Poiché

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{K}}} = 1 \qquad \left(\text{si noti che } \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \geq 0 \text{ e } \frac{1}{\sqrt{K}} > 0\right)$$

il criterio del confronto asintotico assicura che la serie $(*)$ ha lo stesso carattere di $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}}$ (armonica generalizzata), che è divergente.

Pertanto, la serie $\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ non è assolutamente convergente.