Appello 10/7/2012 - Soluzioni compito A.

ESERCIZIO 1

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x \cos x}{(1-2\sin^2 x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{(\cos 2x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} \frac{-(\cos 2x)'}{(\cos 2x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4(\cos 2x)}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

In alternativa era possibile utilizzare la sostituzione $\tan x = t$.

ESERCIZIO 2

La serie risulta definita per $\sin x \neq 0$, cioè per $x \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Poiché

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\left(\frac{\frac{3}{2}\sin x - 1}{\sin^2 x}\right)^k\right|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}\cdot\left|\frac{\frac{3}{2}\sin x - 1}{\underbrace{\sin^2 x}_{\text{sempre positivo}}}\right| = \frac{\left|\frac{3}{2}\sin x - 1\right|}{\sin^2 x},$$

per il criterio della radice la serie data risulta convergente se

$$\frac{\left|\frac{3}{2}\sin x - 1\right|}{\sin^2 x} < 1 \iff \left|\frac{3}{2}\sin x - 1\right| < \underbrace{\sin^2 x}_{\text{termine positivo}}$$

$$\iff -\sin^2 x < \frac{3}{2}\sin x - 1 < \sin^2 x$$

$$\iff \begin{cases} \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x - 1 > 0 \\ \sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 2) > 0 \\ \left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \quad \text{sempre verificata} \end{cases}$$

$$\iff \left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\underbrace{(\sin x+2)}_{\text{sempre positivo}}>0$$

$$\iff \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\iff \exists K\in\mathbb{Z} \text{ tale che } \frac{\pi}{6}+2K\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2K\pi .$$

Sempre per il criterio della radice si ottiene che la serie non è convergente per $\sin x < \frac{1}{2}$, cioè se

$$\exists K\in\mathbb{Z} \text{ tale che } \frac{5\pi}{6}+2K\pi < x < \frac{13}{6}\pi+2K\pi . \quad (*)$$

Resta da analizzare il caso $\sin x = \frac{1}{2}$ (cioè quello in cui

$$\exists K\in\mathbb{Z} \text{ tale che } x=\frac{\pi}{6}+2K\pi \text{ oppure } x=\frac{5}{6}\pi+2K\pi \quad (*)).$$

In tal caso la serie data è

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K}\left(\frac{\frac{3}{4}-1}{1/4}\right)^K=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{K}$$

che è convergente per il criterio di Leibnitz.

p.s. Visto quanto detto all'inizio, nei casi (*) bisogna naturalmente escludere che $x=h\pi$ per qualche $h\in\mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 3.

a) Poiché le derivate parziali

$$f'_x(x,y)=5\cos(5x)+\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \quad f'_y(x,y)=\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

sono continue su $\mathbb{R}^2$, f risulta differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Eventuali massimi e minimi relativi vanno dunque cercati tra i punti critici di f

$$\begin{cases} 5\cos(5x)+\dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2}=0 \\ \dfrac{2x^2y}{1+x^2+y^2}=0 \Rightarrow x^2y=0 \Rightarrow xy=0 \Rightarrow x=0 \text{ o } y=0 \end{cases}$$

$$5\cos(5x)=0 \Rightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+K\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5} \quad K\in\mathbb{Z}$$

Pertanto i punti critici di f sono tutti e soli quelli della forma $\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)$ per $K\in\mathbb{Z}$.

Calcolando la matrice Hessiana

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} -25\sin(5x)+\frac{2y^2-2x^2y^4}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{2x^2-2x^4y^2}{(1+x^2y^2)^2} \end{bmatrix}$$

notiamo che le derivate seconde sono continue e, pertanto, la funzione è due volte differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Poiché

$$Hf\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)=\begin{bmatrix} -25\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right) & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}\right)^2 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\det Hf\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)=\underbrace{-50\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}\right)^2}_{\text{sempre } <0}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)}_{\substack{=1 \ K \text{ pari} \\ =-1 \ K \text{ disp.}}}\begin{cases} <0 & \text{se } K \text{ pari} \\ >0 & \text{se } K \text{ disp.}\end{cases}$$

e dunque

- i punti $\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)$ sono di sella per K pari
- i punti $\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)$ sono punti di minimo relativo forte in quanto $Hf\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)$ è definita positiva.

b) Si ha

$$f(x,y)=\sin(5x)+\log(1+x^2y^2)\geq -1+\log 1=-1$$

$$f\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)=-1 \qquad \forall K \text{ dispari}$$

e, dunque, i punti $\left(\frac{\pi}{10}+K\frac{\pi}{5}, 0\right)$ sono tutti di minimo assoluto per K dispari.

ESERCIZIO 4

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} x e^{-x} dx$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-x e^{-x} \Big|_1^{\omega} + \int_1^{\omega} e^{-x} dx \right]$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\omega e^{-\omega} + e^{-1} - e^{-x} \Big|_1^{\omega} \right]$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\underbrace{-\omega e^{-\omega}}_{\to 0} + \frac{1}{e} - \underbrace{e^{-\omega}}_{\to 0} + \frac{1}{e} \right] = \frac{2}{e}$$

ESERCIZIO 5

c) Poiché le derivate parziali

$$f'_x(x,y) = 2x\, e^{1+x^2+y^2} + \frac{3}{1+9x^2}$$

$$f'_y(x,y) = 2y\, e^{1+x^2+y^2}$$

sono continue su $\mathbb{R}^2$, la funzione f risulta differenziabile su $\mathbb{R}^2$ per il teorema del differenziale totale.