Esame IAM 2B - 13/1/2012

Compito A

Esercizio 1 Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int x \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' \arccos x \, dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int \left(-\cancel{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\right)dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + c$$

[In alternativa, si potevano utilizzare le sostituzioni
$\arccos x = t$ oppure $x = \cos t$]

L'integrale di partenza (indefinito perché ha una singolarità in $x=1$) vale dunque

$$\int_0^1 x \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 1^-} \int_0^{\omega} x\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to 1^-}\Big[-\sqrt{1-\omega^2}\arccos\omega - \omega + \underbrace{\arccos 0}_{=\frac{\pi}{2}}\Big]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 2

Calcoliamo

$$\lim_{K\to+\infty} \sqrt[K]{\left|\frac{(x+5)^{3K}}{8^K+K}\right|} = \lim_{K\to+\infty}|x+5|^3\cdot\sqrt[K]{\frac{1}{8^K}\cdot\frac{8^K}{8^K+K}}$$

$$= \frac{|x+5|^3}{8}\cdot\lim_{K\to+\infty}\sqrt[K]{\frac{1}{1+\frac{K}{8^K}}}$$

$$= \frac{|x+5|^3}{8}$$

e notiamo che

$$\frac{|x+5|^3}{8} < 1 \iff |x+5|^3 < 8 \iff |x+5| < 2$$
$$\iff -2 < x+5 < 2 \iff -7 < x < -3$$

e, analogamente,

$$\frac{|x+5|^3}{8} > 1 \iff x > -3 \text{ oppure } x < -7.$$

Grazie al criterio della radice possiamo allora concludere che

- se $x \in (-7,-3)$, allora la serie è assolutamente convergente (e quindi convergente);
- se $x > -3$ o $x < -7$, allora la serie non è convergente.

Restano da studiare i casi $x=-3$, $x=-7$.

Se $x=-3$, la serie è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{8^k+k}$. Essa non può essere convergente in quanto manca la condizione necessaria per la convergenza, dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{8^k}{8^k+k} = 1.$$

Se $x=-7$, la serie è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{8^k+k}$. Anche in questo caso manca la condizione necessaria per la convergenza in quanto

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(-8)^k}{8^k+k} \right| = 1.$$

In conclusione, la serie data è convergente se e solo se $x \in (-7,-3)$.

Esercizio 3

Massimi e minimi assoluti esistono perché f è continua e il dominio D è chiuso e limitato.

- Cominciamo cercando i candidati max/min nella parte interna $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<3\}$.

Poiché $f'_x(x,y) = 3x^2+3$, $f'_y(x,y)=6y$ abbiamo che le due derivate parziali di f sono continue. Pertanto f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e dunque, per il teorema del differenziale totale, differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Possiamo dunque limitarci alla ricerca di punti critici di f su $\mathring{D}$:

$$\begin{cases} 3x^2+3=0 \\ 6y=0 \end{cases} \rightarrow \text{non ha soluzioni, dunque non esistono punti critici}$$

Ne segue che f assume massimo e minimo assoluto sul bordo ∂D.

- Cerchiamo dunque max/min sul bordo $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3\}$.

Se $(x,y) \in \partial D$ si ha $y^2 = 3-x^2$ e dunque

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3+3x+3y^2 = x^3+3x+9-3x^2 \\ &= x^3-3x^2+3x-1+10 \\ &= (x-1)^3+10 \end{aligned}$$

Poiché $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ (dato che $x^2 = 3-y^2$) si ha che

f assume massimo assoluto in $(\sqrt{3}, 0)$ e minimo assoluto in $(-\sqrt{3}, 0)$.

[In alternativa, era possibile utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.]

Esercizio 4

- Si ha

$$F'(x) = \frac{e^{x^3-3x}}{1+(x^3-3x)^{2012}} \cdot (x^3-3x)' = \frac{e^{x^3-3x}}{1+(x^3-3x)^{2012}} 3(x^2-1).$$

- Studiamo il segno di F'. Poiché

$$\frac{e^{x^3-3x}}{1+(x^3-3x)^{2012}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

si ha che $F'(x) > 0 \iff x^2-1>0 \iff x>1$ oppure $x<-1$

$$F'(x)<0 \iff -1<x<1.$$

Ne segue che -1 è un punto di massimo relativo per F
1 è un punto di minimo relativo per F

Esercizio 5.

- le derivate parziali di f

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+e^{2(x^3+y^5+y)}} \cdot e^{x^3+y^5+y} \cdot 3x^2$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+e^{2(x^3+y^5+y)}} \cdot e^{x^3+y^5+y} \cdot (5y^4+1)$$

sono continue su $\mathbb{R}^2$ (in quanto somma/prodotto/composizione di funzioni continue) e, pertanto, f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.

- Se esistessero massimi o minimi assoluti di f, essi sarebbero anche punti critici per f. Tuttavia f non può avere punti critici in quanto

$$f'_y(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y)$$

e, pertanto, f'_y non si annulla mai.