Appello 14/12/2012 - Soluzioni

ESERCIZIO 1

a) Si ha

$$\int \frac{2x^2+7x+12}{x^4+7x^3+12x^2}\,dx = \int \left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2+7x+12)} + \frac{\cancel{x^2+7x+12}}{x^2\cancel{(x^2+7x+12)}} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{(x+4)(x+3)} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \log|x+3| - \log|x+4| - \frac{1}{x} + C$$

b) Utilizzando il punto a), si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+7x+12}{x^4+7x^3+12x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{2x^2+7x+12}{x^4+7x^3+12x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log|x+3| - \log|x+4| - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\left|\frac{x+3}{x+4}\right| - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\underbrace{\left(\frac{\omega+3}{\omega+4}\right)}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\to 0} - \log\frac{4}{5} + 1 \right)$$

$$= 1 - \log\frac{4}{5}$$

ESERCIZIO 2

a) Vogliamo utilizzare il criterio del confronto asintotico con la serie di termine generico

$$\frac{\frac{1}{K^{4\alpha}}}{1/K^{\alpha^3}} \cdot \frac{1}{K}$$

Calcoliamo pertanto il limite

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\dfrac{\left(1-\cos\frac{2\pi}{K^\alpha}\right)^2}{\arctan\frac{1}{K^{\alpha^3}}}\sqrt{\dfrac{K}{K^3+7}}}{\dfrac{1/K^{4\alpha}}{1/K^{\alpha^3}}\cdot\dfrac{1}{K}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{K^\alpha}}{1/K^{2\alpha}}\right)^2\cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{K^{\alpha^3}}}{\arctan\frac{1}{K^{\alpha^3}}}}_{\to 1}\cdot\sqrt{\underbrace{\frac{K}{K^3+7}\cdot K^2}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{K^\alpha}}{\left(\frac{2\pi}{K^\alpha}\right)^2}}_{\to 1/2}\cdot(2\pi)^2\right)^2 = 4\pi^4 \in \left]0,+\infty\right[$$

Si noti che abbiamo utilizzato i limiti

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{2\pi}{K^\alpha}=0 \qquad e \qquad \lim_{K\to+\infty}\frac{1}{K^{\alpha^3}}=0$$

che in ultima analisi, sono dovuti al fatto che $\alpha>0$.
Per il criterio del confronto asintotico, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{2\pi}{K^\alpha}\right)^2}{\arctan\frac{1}{K^{\alpha^3}}}\sqrt{\frac{K}{K^3+7}} \ \text{è conv. (div.)} \iff \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1/K^{4\alpha}}{1/K^{\alpha^3}}\cdot\frac{1}{K}=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^{4\alpha-\alpha^3+1}} \ \text{è conv. (div.)}$$

$$\iff 4\alpha-\alpha^3+1 > 1 \ (\leq 1) \iff 4\alpha-\alpha^3 = \underbrace{\alpha}_{\text{è } >0 \text{ (stiamo considerando solo } \alpha>0)}(4-\alpha^2) > 0 \ (\leq 0)$$

$$\iff 4-\alpha^2>0 \ (\leq 0) \iff \alpha<2 \ (\geq 2)$$

In conclusione: la serie proposta è convergente per $0<\alpha<2$ e divergente per $\alpha\geq 2$.

b) Se $\alpha=0$ la serie proposta è

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(1-\cos 2\pi)^2}{\arctan 1}\cdot\sqrt{\frac{K}{K^3+7}}=\sum_{K=1}^{\infty}0 \qquad (\cos(2\pi)=1\,!)$$

che è chiaramente convergente.

ESERCIZIO 3

a) La funzione f è continua su $\mathbb{R}^2$, inoltre D è chiuso e limitato. Ne segue che D ammette massimo e minimo assoluto su D.
Poiché le derivate parziali
$$f'_x(x,y) = 3x^2+y^2 \qquad f'_y(x,y) = 2xy$$
sono continue, f risulta di classe C^1 (e dunque differenziabile).

- Cerchiamo candidati max/min in $\mathring{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<5\}$: essi vanno cercati tra i punti critici di f:
$$\begin{cases} 3x^2+y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$$ $3x^2+y^2=0 \longrightarrow$ poiché $3x^2\geq 0$ e $y^2\geq 0$, per avere $3x^2+y^2=0$ è necessario avere $x=y=0$.

L'origine $(0,0)$ è dunque l'unico punto critico di f.
Esso appartiene a $(0,0)$.

- Cerchiamo candidati max/min su $\partial D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=5\}$ ⊛ (vedi sotto)
Essi dovranno soddisfare il sistema del moltiplicatore di Lagrange
$$\begin{cases} 3x^2+y^2=2\lambda x \\ 2xy = 2\lambda y \longrightarrow 2(x-\lambda)y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$
$2(x-\lambda)y=0$: o $x=\lambda$, oppure $y=0$.

Se $x=\lambda$ possiamo riscrivere la prima e la terza equazione come
$$\begin{cases} 3x^2+y^2=2x^2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$
e, chiaramente, non ci sono soluzioni.
Se $y=0$, allora $x=\pm\sqrt{5}$. Questo corrisponde ai candidati $(\sqrt{5},0)$ e $(-\sqrt{5},0)$.

- Confrontiamo i valori di f nei tre candidati:
$$f(0,0)=0 \qquad f(\sqrt{5},0)=(\sqrt{5})^3=25\sqrt{5} \qquad f(-\sqrt{5},0)=(-\sqrt{5})^3=-25\sqrt{5}.$$
Ne segue che f ammette massimo assoluto su D nel punto $(\sqrt{5},0)$ e minimo assoluto in $(-\sqrt{5},0)$.

⊛ Vanno naturalmente esclusi i punti $(x,y)\in\partial D$ tali che
$\nabla g(x,y) = (2x,2y) = (0,0)$ (dove abbiamo posto $g(x,y) := x^2+y^2$)
L'unico punto che soddisfa questa relazione è $(0,0)$, che non appartiene a ∂D.

ESERCIZIO 4

La derivata di $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{2+\sin t}{1+t^{2012}}\,dt$ è, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(x) = \frac{2+\sin(x^2)}{1+(x^2)^{2012}} \cdot (x^2)' = \frac{2+\sin x^2}{1+x^{2024}} \cdot 2x.$$

Poiché $2+\sin x^2 \geq 1 > 0$ e $1+x^{2024} \geq 1 > 0$, si ha che $\frac{2+\sin x^2}{1+x^{2024}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, dunque

$$F'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$$

$$F'(x) \leq 0 \iff x \leq 0$$

Ne segue che F è decrescente su $]-\infty, 0[$ e crescente su $]0, +\infty[$. In particolare, F ha un unico minimo assoluto in 0.