Istituzioni di Analisi Matematica II - 27/3/2012

Esercizio 1

a) Grazie alla sostituzione

$$x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$$
$$x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

otteniamo

$$\int \frac{x}{(x^2+3)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+3)(t+2)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|t+2| - \log|t+3|\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log(x^2+2) - \log(x^2+3)\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+2}{x^2+3}\right) + c$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $x^2 \geq 0$, da cui

$$|x^2+2| = x^2+2 \qquad e \qquad |x^2+3| = x^2+3$$

b) Per definizione di integrale improprio si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x^2+3)(x^2+2)}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_2^{\omega}\frac{x}{(x^2+3)(x^2+2)}\,dx$$
$$= \lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+2}{x^2+3}\right)\right]_2^{\omega}$$
$$= \lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\log\underbrace{\left(\frac{\omega^2+2}{\omega^2+3}\right)}_{\to 1 \text{ per } \omega\to+\infty} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{6}{7}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{6}{7}\right)$$
$$\left(= \frac{1}{2}\log\left(\frac{7}{6}\right) = \log\sqrt{7/6}\right)$$

Esercizio 2

Euristicamente si ha

$$\sin \underbrace{\frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}}_{\to 0} \approx \frac{2+K^2}{K^6+K^5+4} \approx \frac{K^2}{K^6} = \frac{1}{K^4}$$

per $K \to +\infty$

$$e^{\overbrace{\frac{K+1}{K^4+4}}^{\to 0}} - 1 \approx \frac{K+1}{K^4+4} \approx \frac{K}{K^4} = \frac{1}{K^3}$$

In maniera precisa, abbiamo

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\left(\sin \frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}\right)^{\alpha^2}\left(e^{\frac{K+1}{K^4+4}}-1\right)^{\alpha}}{\left(\frac{1}{K^4}\right)^{\alpha^2}\cdot\left(\frac{1}{K^3}\right)^{\alpha}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin \frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}}{\frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}}{K^2/K^6}}_{\to 1} \right)^{\alpha^2} \cdot \left(\underbrace{\frac{e^{\frac{K+1}{K^4+4}}-1}{\frac{K+1}{K^4+4}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{K+1}{K^4+4}}{\frac{K}{K^4}}}_{\to 1} \right)^{\alpha} = 1$$

perché $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ perché $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

In particolare: poiché $\left(\frac{1}{K^4}\right)^{\alpha^2}\cdot\left(\frac{1}{K^3}\right)^{\alpha} > 0 \ \forall K \geq 1$ si ha che
$\left(\sin \frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}\right)^{\alpha^2}\left(e^{\frac{K+1}{K^4+4}}-1\right)^{\alpha} > 0$ definitivamente.

Per il teorema del confronto asintotico possiamo concludere che

$\sum_{K=1}^{\infty} \left(\sin \frac{2+K^2}{K^6+K^5+4}\right)^{\alpha^2}\left(e^{\frac{K+1}{K^4+4}}-1\right)^{\alpha}$ è convergente (divergente a $+\infty$)

$\iff \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{K^4}\right)^{\alpha^2}\left(\frac{1}{K^3}\right)^{\alpha} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{4\alpha^2+3\alpha}}$ è " (" " ")

$\iff 4\alpha^2 + 3\alpha > 1 \quad (4\alpha^2+3\alpha \leq 1)$

$\iff (4\alpha-1)(\alpha+1) > 0 \quad ((4\alpha-1)(\alpha+1) \leq 0)$

In conclusione: la serie data è

convergente se $\alpha > \frac{1}{4}$ oppure $\alpha < -1$

divergente se $-1 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 3

Poiché $g(x,y) := x^4+y^2$ è continua, D risulta chiuso (oltre che limitato) e, pertanto, la funzione f (che è continua) assume max e min assoluti su D.
Inoltre $\nabla f(x,y) = (8x^7, 4y^3)$ e $\nabla g(x,y) = (4x^3, 2y)$; essendo le derivate parziali f'_x, f'_y, g'_x, g'_y dei polinomi, esse risultano continue su $\mathbb{R}^2$.
Ne segue che sia f che g sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e, in particolare, differenziabili su $\mathbb{R}^2$.

- Cerchiamo punti critici di f nella parte interna $\mathring{D} = \{(x,y) : y^2+x^4 < 81\}$
Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 8x^7 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

L'unico punto critico è dunque $(0,0)$ (che appartiene a $\mathring{D}$).

- Cerchiamo candidati sul bordo $\partial D = \{(x,y) : y^2+x^4 = 81\}$.
Si ha $\nabla g(x,y) = (4x^3, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin \partial D$
I candidati in ∂D dovranno dunque soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 8x^7 = 4\lambda x^3 \Rightarrow 4x^3(2x^4-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } \lambda = 2x^4 \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ y^2+x^4 = 81 \end{cases}$$

Se $x=0$, dalla terza equazione ricaviamo $y^2 = 81$, cioè $y = \pm 9$.
Se $\lambda = 2x^4$, dalla seconda equazione si ottiene

$$4y^3 = 4x^4 y \Rightarrow 4y(y^2-x^4) = 0$$

da cui: o $y=0$ (e quindi, per la terza equazione, $x = \pm 3$), oppure $y^2 = x^4$ (e la terza equazione dà $y^2+x^4 = 2x^4 = 2y^2 = 81$, da cui $y = \pm\sqrt{\frac{81}{2}} = \pm\frac{9}{\sqrt{2}}$ e $x = \pm\sqrt[4]{\frac{81}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$).

- Andiamo dunque a considerare tutti i candidati trovati:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,\pm 9) = 9^4, \quad f(\pm 3, 0) = 3^8 = 9^4, \quad f\left(\pm\frac{3}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{9}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9^4}{2}$$

Il minimo assoluto è dunque raggiunto nel punto $(0,0)$, mentre il massimo assoluto è raggiunto in $(0,9)$, $(0,-9)$, $(3,0)$ e $(-3,0)$.

Soluzione alternativa: si ha

$$f(x,y) = x^8 + y^4 \geq 0 = f(0,0),$$

dunque $(0,0)$ è minimo assoluto di f su D (in realtà su $\mathbb{R}^2$). Inoltre

$$x^8+y^4 \overset{(A)}{\leq} x^8+y^4+2x^4y^2 = (x^4+y^2)^2 \overset{(B)}{\leq} 81^2 \quad \forall (x,y) \in D$$

per la definizione di D

Se esistono, gli unici punti $(x,y) \in D$ in cui $f(x,y) = 81^2$ sono quelli in cui le disuguaglianze (A) e (B) sono delle uguaglianze. Dunque si deve avere

$$\begin{cases} 2x^4y^2 = 0 \\ x^4+y^2 = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y^2 = 81 \to y = \pm 9 \\ \text{oppure} \\ y=0 \longrightarrow x^4 = 81 \to x = \pm 3 \end{array}$$

Effettivamente si ha $f(0,\pm 9) = f(\pm 3, 0) = 81^2$ $(= 9^4 = 3^8)$ e, pertanto, i punti $(0,9), (0,-9), (3,0)$ e $(-3,0)$ sono massimi assoluti di f su D.

Esercizio 4 - c)

Poiché

$$\lim_{K\to+\infty} \left| \frac{\frac{(K+1)+2}{2^{K+1}}}{\frac{K+2}{2^K}} \right| = \lim_{K\to+\infty} \underbrace{\frac{K+3}{K+2}}_{\to 1} \cdot \frac{\cancel{2^K}\,1}{\cancel{2^{K+1}}\,2} = \frac{1}{2} < 1,$$

per il criterio del rapporto la serie $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K+2}{2^K}$ è assolutamente convergente (e quindi convergente).

Esercizio 5 - b)

Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\varphi + 2\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \underset{\to 0}{\rho} \Big[\underbrace{\cos\varphi^3 + 2\cos\varphi\sin^2\varphi}_{\text{limitato: } |\cos^3\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi| \leq |\cos^3\varphi| + 2|\cos\varphi\sin\varphi| \leq 1+2=3} \Big] = 0$$