Appello 16/9/2013

ESERCIZIO 1 - a)

Utilizzando la sostituzione $\tan\frac{x}{2}=t$ e le relazioni

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=-\frac{\pi}{2} \to t=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$x=0 \to t=\tan 0 = 0$$

otteniamo

$$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{3+\sin x+\cos x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{1}{t^2+t+2}\,dt = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\frac{7}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{4}{7}}\,\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7/4}}\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{7}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

ESERCIZIO 2

Poiché la funzione integranda è continua in $(2,+\infty)$, le uniche singolarità dell'integrale sono presenti negli estremi $\boxed{2}$ e $+\infty$.

Cominciamo studiando $\int_2^3 \frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)dx$. Poiché

nel caso α sia negativo!

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{\cancel{(x-2)^\alpha}}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)}{\cancel{(x-2)^\alpha}} = \frac{\sin\frac{1}{4}}{16} > 0$$
- $(x-2)^\alpha$ è continua e positiva in $(2,3]$
- $\frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)$ è continua in $(2,3]$,

per il criterio del confronto asintotico abbiamo che

$$\int_2^3 \frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)dx \quad \text{è convergente (divergente a } +\infty)$$

$$\iff \int_2^3 (x-2)^\alpha dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{-\alpha}}\,dx \quad \text{è conv. } (+\infty)$$

$$\iff -\alpha \underset{(\geq)}{<} 1 \iff \alpha > -1 \; (\alpha \leq -1)$$

Per quanto riguarda $\int_3^{+\infty} \frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)dx$, abbiamo che

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)}{\underbrace{\frac{1}{x^{3-\alpha}}}_{= \frac{x^\alpha}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^\alpha\left(\frac{x}{2+x}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{2+x}}{\frac{1}{2+x}}}_{\to 1 \text{ perché } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2+x}=1} \cdot \frac{\frac{1}{2+x}}{x} = 1 > 0$$
- $\frac{1}{x^{3-\alpha}}$ è continua e positiva in $(3,+\infty)$
- $\frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)$ è continua in $(3,+\infty)$.

Pertanto, il criterio del confronto asintotico assicura che

$$\int_3^{+\infty} \frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)dx \quad \text{è convergente (divergente a } +\infty)$$

$$\iff \int_3^{+\infty}\frac{1}{x^{3-\alpha}}\,dx \quad \text{è conv. } (+\infty) \iff 3-\alpha \underset{(\leq)}{>} 1 \iff \alpha < 2 \; (\alpha \geq 2)$$

In conclusione, l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{(x-2)^\alpha}{(2+x)^2}\sin\left(\frac{1}{2+x}\right)dx$ è convergente se $-1<\alpha<2$ e divergente $(+\infty)$ se $\alpha \leq -1$ oppure $\alpha \geq 2$.

ESERCIZIO 3 - a)

Utilizziamo il criterio del rapporto: poiché

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(x^2+4x+3)^{\cancel{k+1}}}{(k+1)!+3^{k+1}}}{\dfrac{\cancel{(x^2+4x+3)^k}}{k!+3^k}}\right| = |x^2+4x+3|\lim_{k\to+\infty}\frac{k!+3^k}{(k+1)!+3^{k+1}}$$

$$= |x^2+4x+3|\lim_{k\to+\infty}\frac{1+\overbrace{\dfrac{3^k}{k!}}^{\to 0}}{(k+1)+\underbrace{\dfrac{3^{k+1}}{k!}}_{\to 0}} = 0 < 1,$$

la serie proposta è convergente $\forall x\in\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4 - a)

La funzione f è continua su $\mathbb{R}^2$ (in quanto composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}^2$) e il dominio D è chiuso e limitato (in quanto sottolivello "con disuguaglianza larga" di una funzione continua); pertanto, f assume massimo e minimo assoluto su D per il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Cerchiamo candidati max/min su $\mathring{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\}$.

Poiché $\nabla f(x,y)=(6x-6,\, 8y)$ è continuo, f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ per il teorema del differenziale totale. Cerchiamo punti critici di f in $\mathring{D}$:

$$\begin{cases} 6x-6=0 \\ 8y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}$$

Abbiamo dunque un candidato $(1,0)\in\mathring{D}$.

Cerchiamo candidati max/min su $\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$.

Poiché
- $g(x,y):=x^2+y^2$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ (sempre perché $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$ è continuo su $\mathbb{R}^2$)
- $\nabla g(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$, punto che non appartiene a ∂D

possiamo applicare il criterio del moltiplicatore di Lagrange:

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 6x-6=2\lambda x \\ 8y=2\lambda y \longrightarrow 2y(4-\lambda)=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow y=0 \\ \text{oppure} \\ \searrow \lambda=4 \end{array} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Se $y=0$, dalla terza equazione ricaviamo $x=\pm 2$.

Se $\lambda=4$, la prima equazione diventa $6x-6=8x$, da cui $x=-3$. Ma, allora, la terza equazione $x^2+y^2=9+y^2=4$ non ha soluzione.

In conclusione, abbiamo i tre candidati $(1,0)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$.

Poiché

$$f(1,0)=9$$
$$f(2,0)=12$$
$$f(-2,0)=36,$$

il massimo di f su D è raggiunto in $(-2,0)$, mentre il minimo è raggiunto in $(1,0)$.