Soluzioni esame 16/12/2013 - fila A

Esercizio 1

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 (2x^3+3x^2+x)\arctan x \, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{2}+x^3+\frac{x^2}{2}\right)\arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{x^4}{2}+x^3+\frac{x^2}{2}}{1+x^2}\, dx$$

$$= 2\arctan 1 - 0 - \int_0^1 \left[\frac{\frac{1}{2}x^2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{1+x^2}} + \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\right] dx$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 - 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\log 2$$

Esercizio 2

a) La funzione $\dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}$ è continua e positiva in $(0,1]$.

Poiché, per $\alpha>0$, si ha $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, possiamo sfruttare il limite notevole $\lim_{t\to 0}\dfrac{\log(1+t)}{t} = 1$ per ricavare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}}{x^\alpha/\cancel{x^{3\alpha}}} = 1.$$

Pertanto, per $\alpha>0$, il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\, dx \text{ è conv. (div.)}$$

$$\iff \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx \text{ è conv. (div.)}$$

$$\iff 2\alpha < 1 \quad (2\alpha \geq 1) \iff \alpha < \frac{1}{2} \quad \left(\alpha \geq \frac{1}{2}\right).$$

In conclusione: <u>se $\alpha > 0$</u>, l'integrale $\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\,dx$ è convergente se $0<\alpha<\frac{1}{2}$, divergente ($a +\infty$) se $\alpha \geq \frac{1}{2}$

b) Trattiamo a parte il caso $\alpha=0$, in cui l'integrale è convergente perché

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\,dx = \int_0^1 \log 2\,dx = \log 2.$$

Per $\alpha<0$ si ha invece $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$, dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+x^\alpha)}{\cancel{x^{3\alpha}}}}{\frac{\log x^\alpha}{\cancel{x^{3\alpha}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(x^\alpha\left(\frac{1}{x^\alpha}+1\right)\right)}{\log x^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cancel{\log x^\alpha}}{\cancel{\log x^\alpha}} + \frac{\log(\overbrace{1+\frac{1}{x^\alpha}}^{\to 1})}{\underbrace{\log x^\alpha}_{\to +\infty}}\right) = 1$$

Per il criterio del confronto asintotico si ha allora che

$\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\,dx$ è conv. (div.)

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\log x^\alpha}{x^{3\alpha}}\,dx = \int_0^1 \alpha x^{-3\alpha}\log x\,dx \text{ è conv. (div.)}$$

(qua uso la definizione di integrale improprio)

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0^+}\left(\int_\omega^1 \alpha x^{-3\alpha}\log x\,dx\right) < +\infty \quad (=+\infty) \quad \text{(integro per parti)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0^+}\left(\alpha\frac{x^{1-3\alpha}}{1-3\alpha}\log x\Big|_\omega^1 - \int_\omega^1 \alpha\frac{x^{\cancel{1}-3\alpha}}{1-3\alpha}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right) < +\infty \quad (=+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0^+}\left(0 - \frac{\alpha}{1-3\alpha}\underbrace{\omega^{1-3\alpha}\log\omega}_{\to 0 \text{ perché } 1-3\alpha>0} - \alpha\frac{x^{1-3\alpha}}{(1-3\alpha)^2}\Big|_\omega^1\right) < +\infty \quad (=+\infty)$$

Poiché $\lim_{\omega\to 0^+}\left(-\frac{\alpha}{(1-3\alpha)^2} + \frac{\alpha}{(1-3\alpha)^2}\omega^{1-3\alpha}\right) = -\frac{\alpha}{(1-3\alpha)^2} < +\infty$,

deduciamo che $\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\,dx$ è convergente per ogni $\alpha<0$.

Metodo alternativo: se $\alpha<0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}} = 0 \qquad (\text{esercizio: verificare!})$$

perciò la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}} & \text{se } x\in(0,1] \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è continua su $[0,1]$ e, dunque, integrabile secondo Riemann su $[0,1]$. Pertanto, $\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{3\alpha}}\,dx$ è convergente per ogni $\alpha<0$.

Esercizio 3

a) Notiamo che

$$x^{\log n} = e^{\log(x^{\log n})} = e^{(\log n)(\log x)} = \left(e^{\log n}\right)^{\log x} = n^{\log x}$$

Pertanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\log n}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log x}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-\log x}} \quad \text{è conv. (div.)}$$

$$\iff 4-\log x > 1 \qquad (4-\log x \leq 1)$$

$$\iff \log x < 3 \qquad (\log x \geq 3)$$

$$\iff 0<x<e^3 \qquad (x\geq e^3)$$

Esercizio 4

a) Chiaramente, f è definita purché l'argomento del logaritmo sia positivo:

$$1+\frac{x}{1+x^2} > 0 \iff \frac{1+x^2+x}{1+x^2} > 0 \iff 1+x+x^2 = 1+x+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x^2 > 0$$

$$\iff \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 > 0.$$

La quantità $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ è somma di due quadrati, pertanto è sempre ≥ 0. Poiché $1+\frac{x}{2}$ e x non possono essere contemporaneamente nulli, deduciamo che

$$1+x+x^2 = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 > 0 \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (*)$$

Pertanto, il dominio di f è tutto $\mathbb{R}^2$.

b) Notiamo che le derivate parziali

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} e^{(x+y)^2} \cancel{2}(x+y) + \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}} \cdot \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= (x+y)\, e^{(x+y)^2} + \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)(1+x^2)}$$

$$f'_y(x,y) = (x+y)\, e^{(x+y)^2}$$

$\xrightarrow{\text{per } (*)}$ sono continue su $\mathbb{R}^2$, dunque f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Cerchiamo punti critici di f:

$$\begin{cases} (x+y)\, e^{(x+y)^2} + \dfrac{1-x^2}{(1+x+x^2)(1+x^2)} = 0 & \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{(1+x+x^2)(1+x^2)} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ (x+y) \underbrace{e^{(x+y)^2}}_{\text{sempre } > 0} = 0 & \Rightarrow x+y = 0 \\ & \Rightarrow y = -x \end{cases}$$

Abbiamo pertanto due punti critici: $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f''_{xx}(x,y) = e^{(x+y)^2} + 2(x+y)^2 e^{(x+y)^2} + \frac{-2x(1+x+x^2)(1+x^2) - (1-x^2)[(1+2x)(1+x^2) + (1+x+x^2)2x]}{(1+x+x^2)^2(1+x^2)^2}$$

$$= e^{(x+y)^2}\left(1+2(x+y)^2\right) + \frac{-1-6x-4x^2-4x^3+x^4+2x^5}{(1+x+x^2)^2(1+x^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = e^{(x+y)^2}\left(1+2(x+y)^2\right)$$

Essendo continue, f è due volte differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo le matrici Hessiane nei due punti critici:

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 1-\frac{12}{36} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha determinante } -\frac{1}{3} < 0$$

$$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} 1+\frac{4}{4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \det = 1 > 0 \\ \text{è definita positiva.} \end{array}$$

Pertanto, $(-1,1)$ è un minimo relativo forte per f, mentre $(1,-1)$ è un punto di sella.