Appello 25/3/2013 - Soluzioni compito A.

ESERCIZIO 1

Calcoliamo

$$\int \frac{x-4}{x+x^3}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x^2)}\,dx - \int \frac{4(1+x^2)-4x^2}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$= \arctan x - \int \frac{4}{x}\,dx + 2\int \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1+x^2)}\,dx$$

$$= \arctan x - 4\log|x| + 2\log(1+x^2) + C$$

ESERCIZIO 2

Si ha

$$\lim_{K\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{\cancel{K+1}}}{K+1+\sqrt{K+1}}\left(-\frac{x^2+1}{5x}\right)^{\cancel{K+1}}}{\frac{\cancel{2^K}}{K+\sqrt{K}}\cancel{\left(-\frac{x^2+1}{5x}\right)^K}}\right| = \lim_{K\to+\infty}\left|2\underbrace{\frac{K+\sqrt{K}}{K+1+\sqrt{K+1}}}_{\to 1}\left(-\frac{x^2+1}{5x}\right)\right|$$

$$= 2\underbrace{\left|\frac{x^2+1}{5x}\right|}_{>0,\ \text{dato che } x>0} = 2\,\frac{x^2+1}{5x},$$

e, inoltre,

$2\,\dfrac{x^2+1}{5x} \underset{(>)}{<} 1 \iff$ (uso il fatto che $x>0$, altrimenti dovrei "rovesciare" la disuguaglianza)

$$2x^2+2 \underset{(>)}{<} 5x$$

$$\iff 2x^2-5x+2 \underset{(>)}{<} 0$$

$$\iff \frac{1}{2} < x < 2 \quad \left(x>2 \text{ oppure } (0<)x<\frac{1}{2}\right)$$

Pertanto, il criterio del rapporto garantisce che

- la serie è convergente se $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$
- la serie non è convergente se $x>2$ oppure $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Restano da analizzare i casi $x = 2$ e $x = \frac{1}{2}$.
Si verifica facilmente che, in tutti e due i casi, si ha $\frac{x^2+1}{5x} = \frac{1}{2}$. Dobbiamo pertanto studiare la serie

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{K+\sqrt{K}}\left(-\frac{1}{2}\right)^K = \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \frac{1}{K+\sqrt{K}}.$$

Poiché
- $\frac{1}{K+\sqrt{K}} > 0 \quad \forall K \geq 1$
- $\lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K+\sqrt{K}} = 0$
- $\frac{1}{(K+1)+\sqrt{K+1}} < \frac{1}{K+\sqrt{K}} \quad \forall K \geq 1,$

il criterio di Leibnitz garantisce che la serie è convergente.
In conclusione, la serie proposta è convergente per $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ e non convergente per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ o $x > 2$.

ESERCIZIO 3

Poiché f è continua e D è chiuso e limitato, f assume massimo e minimo su D.
Ponendo $g(x,y) := x^2 + y^2$, osserviamo preliminarmente che

$$\nabla f(x,y) = (y^4, 4xy^3) \quad \text{e} \quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

In particolare, sia f che g sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e, quindi, differenziabili su $\mathbb{R}^2$.
Cominciamo cercando candidati max/min nella parte interna $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$: essi saranno i punti critici di f in $\mathring{D}$. Risolviamo dunque il sistema

$$\begin{cases} y^4 = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ xy^3 = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } y = 0. \end{cases}$$

Pertanto, tutti i punti del tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, sono punti critici.
Essi appartengono a $\mathring{D}$ se e solo se $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Cerchiamo ora candidati max/min nel bordo $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 3\}$ utilizzando il teorema del moltiplicatore di Lagrange: $\circledast$

$$\begin{cases} y^4 = 2\lambda x \\ 4xy^3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow y(4xy^2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ opp. } 2\lambda = 4xy^2$$

Se $y = 0$, allora la terza equazione implica $x^2 = 3$, cioè $x = \pm\sqrt{3}$.

Se invece $2\lambda = 4xy^2$, la prima equazione si riscrive come

$$y^4 = 4x^2y^2 \Rightarrow y^2(y^2 - 4x^2) = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ (caso già analizzato)

oppure $\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x^2 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x^2 = 3 \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = \frac{3}{5} \\ y^2 = 4x^2 = \frac{12}{5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{12}{5}} \end{array}$

$\circledast$ si noti che f e g sono differenziabili ovunque e che $\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin \partial D$

Poiché

$$f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{144}{25}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{144}{25}$$

ne segue che i punti $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ sono di massimo e i punti $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ sono di minimo per f su D.

ESERCIZIO 4

b) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7} \log x \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^7} \log x \, dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\frac{1}{6x^6} \log x \Big|_1^{\omega} + \int_1^{\omega} \frac{1}{6x^6} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right)$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\frac{\log \omega}{6\omega^6} + 0 - \frac{1}{36\omega^6} + \frac{1}{36} \right)$$

$$= \frac{1}{36}$$

c) Poiché

- $0 < \frac{2}{x^3} \le \frac{3+\sin x}{x^3} \le \frac{4}{x^3} \qquad \forall x \in [1,+\infty)$
- $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^3}\,dx$ è convergente,

per il criterio del confronto anche $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{x^3}\,dx$ è convergente.

ESERCIZIO 5.

c) Passando in coordinate polari otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+7xy^5}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^6\cos^6\varphi + 7\rho^6\cos\varphi\sin^5\varphi}{(\rho^2)^2}$$

$$= \lim_{\rho\to0^+} \underbrace{\frac{\rho^{\cancel{6}\,2}}{\cancel{\rho^4}}}_{\to 0} \underbrace{(\cos^6\varphi + 7\cos\varphi\sin^5\varphi)}_{\text{limitato:}} = 0$$

$$|\cos^6\varphi + 7\cos\varphi\sin^5\varphi| \le 1+7 = 8$$