COGNOME E NOME (stampatello): ....

Firma .... Ritirato ☐

Esercizio 1 a) (7 punti) Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx$.

b) (2 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{\log 18}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx$.

a) Utilizzando la sostituzione

$$e^x - 9 = t^2 \qquad e^x\,dx \to 2t\,dt$$

troviamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx = \int \frac{1}{e^x\sqrt{e^x-9}}\,e^x\,dx = \int \frac{1}{(t^2+9)\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3} + c$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{e^x-9}}{3} + c$$

b) Per definizione

$$\int_{\log 18}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{\log 18}^{\omega}\frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{2}{3}\arctan\underbrace{\frac{\sqrt{e^\omega-9}}{3}}_{\to+\infty} - \frac{2}{3}\arctan 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$$

COGNOME E NOME (stampatello): ....

Esercizio 2 a) (2 punti) Enunciare la definizione di convergenza per l'integrale improprio di una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$.

b) (2 punti) Si enunci il criterio del confronto per integrali impropri.

c) (2 punti) Si dimostri che l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 7 - \cos(e^x - 2)}dx$ è convergente.

c) Poiché $x^3+7-\cos(e^x-2) \geq x^3+7-1 > x^3 > 0 \ \forall x \in [1,+\infty)$, si ha

- $0 < \dfrac{1}{x^3+7-\cos(e^x-2)} < \dfrac{1}{x^3} \quad \forall x \in [1,+\infty)$

- $\dfrac{1}{x^3+7-\cos(e^x-2)}$ e $\dfrac{1}{x^3}$ sono continue in $[1,+\infty)$, pertanto sono integrabili secondo Riemann su $[1,\omega]$ per ogni $\omega \in (1,+\infty)$.

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ è convergente, per il criterio del confronto anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+7-\cos(e^x-2)}\,dx$ è convergente.

COGNOME E NOME (stampatello): ....

Esercizio 3 a) (7 punti) Stabilire il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{3\alpha+1}\left(1-\cos\frac{1}{K^2}\right)^{2\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) (2 punti) Si enunci il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica.

a) Poiché

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\cancel{K^{3\alpha+1}}\left(1-\cos\frac{1}{K^2}\right)^{2\alpha}}{\cancel{K^{3\alpha+1}}\cdot\frac{1}{K^{8\alpha}}} = \lim_{K\to+\infty}\left(\frac{1-\cos\frac{1}{K^2}}{\left(\frac{1}{K^2}\right)^2}\right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha},$$

per il criterio del confronto asintotico la serie proposta è convergente (divergente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{K=1}^{\infty} K^{3\alpha+1}\frac{1}{K^{8\alpha}} = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^{5\alpha-1}} \text{ è conv. (div. a } +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha-1>1 \quad (5\alpha-1\leq 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha>\frac{2}{5} \quad \left(\alpha\leq\frac{2}{5}\right)$$

COGNOME E NOME (stampatello): ....

Esercizio 4 a) (7 punti) Dimostrare che esistono e trovare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 3x + xy$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

b) (2 punti) Dimostrare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2014} + y^7}{(x^2+y^2)^3} = 0$.

a) Poichē f ē continua e D ē chiuso e limitato, il teorema di Bolzano-Weierstrass assicura l'esistenza di massimi e minimi assoluti.

Cerchiamo candidati max/min in $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9\}$.

Poichē le derivate prime $f'_x(x,y) = 3+y$, $f'_y(x,y) = x$ sono continue su $\mathbb{R}^2$ (quindi f ē di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$), ē sufficiente cercare punti critici di f:

$$\begin{cases} 3+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,-3) \notin \mathring{D}$$

Non vi sono dunque punti critici in $\mathring{D}$.

Cerchiamo ora candidati in $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$.

Poniamo $g(x,y) := x^2+y^2$ e notiamo che $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Dunque g ē di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e le sue derivate parziali del prim'ordine si annullano soltanto in $(0,0) \notin \partial D$. I candidati max/min su ∂D soddisfano perciō il sistema del moltiplicatore di Lagrange

$$\begin{cases} 3+y = 2\lambda x & \Rightarrow 3y+y^2 = 2\lambda xy \\ x = 2\lambda y & \Rightarrow x^2 = 2\lambda xy \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+y^2 = x^2 \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+y^2+y^2 = 9 \Rightarrow 2y^2+3y-9 = 0 \Rightarrow \underset{x=0}{y=-3} \text{ opp. } \underset{x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}}{y=\tfrac{3}{2}}$$

Confrontiamo i candidati:

$$f(0,-3) = 0 \qquad f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4} \qquad f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Pertanto il punto $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ē di massimo assoluto e $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ di minimo assoluto.

b) Passando alle coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2014}+y^7}{(x^2+y^2)^3} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{2014}(\cos\varphi)^{2014} + \rho^7(\sin\varphi)^7}{\rho^6} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \underbrace{\rho}_{\to 0}\Big[\underbrace{\rho^{2007}}_{\to 0}\underbrace{(\cos\varphi)^{2014}}_{\text{limitato}} + \underbrace{(\sin\varphi)^7}_{\text{limitato}}\Big] = 0.$$