Università degli Studi di Padova

C.L. Statistica — Analisi II
I Appello— 25 Marzo 2014
Durata: 1 ora e 45 minuti
Tema 1

Esercizio 1. Dire per quali α l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} x^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

converge, e calcolare il valore dell'integrale quando $\alpha = -2$.

Esercizio 2. Si determini l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{-k^2} (e^x)^k$$

converge assolutamente.

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

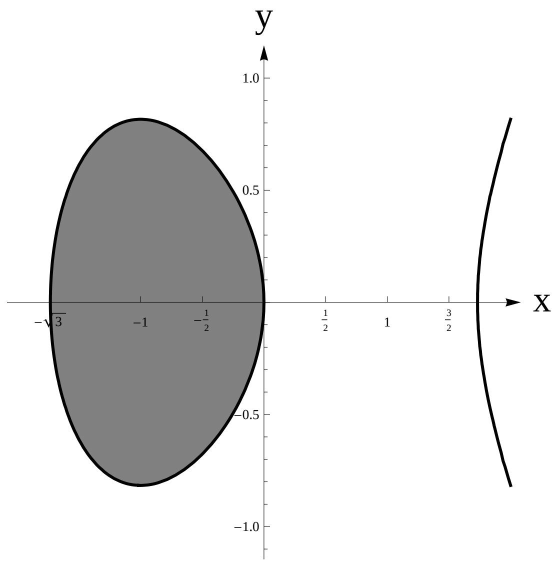
ed il vincolo

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) \le 0, x \le 0\}$$

(regione ombreggiata in figura) dove

$$g(x, y) = \frac{y^2}{2} - x\left(\frac{x^2}{3} - 1\right).$$

Si determinino i punti critici di $f|_M$ e si dica quali tra essi sono punti di massimo assoluto e di minimo assoluto per f.



Teoria 1. Enunciare il teorema di integrazione per parti. *Delinearne la dimostrazione (extracredito).*

Teoria 2. Cosa è la matrice Hessiana di una funzione f di 2 variabili? Come si caratterizzano i punti critici di f per mezzo della matrice Hessiana?

Università degli Studi di Padova

C.L. Statistica — Analisi II
I Appello— 25 Marzo 2014
Durata: 1 ora e 45 minuti
Tema 2

Esercizio 1. Dire per quali α l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} x^{\alpha} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

converge, e calcolare il valore dell'integrale quando $\alpha = -2$.

Esercizio 2. Si determini l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(k \sin \frac{\pi}{k}\right)^{-k} (4 \arctan x)^k$$

converge assolutamente.

Esercizio 3. Sia data la funzione

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

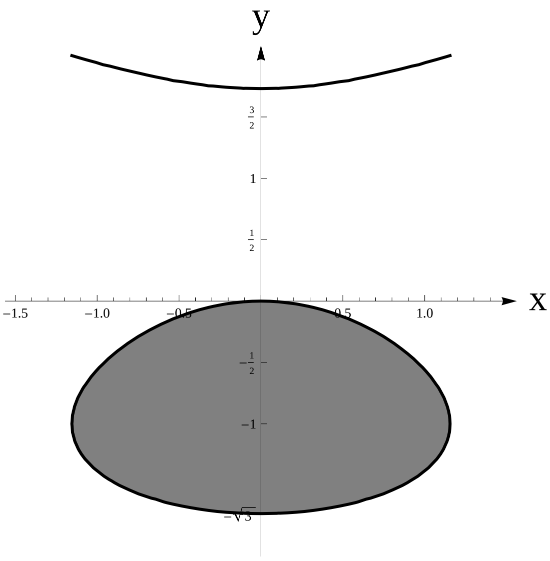
ed il vincolo

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq 0, y \leq 0\}$$

dove

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} - y\left(\frac{y^2}{3} - 1\right).$$

Si determinino i punti critici di $f|_M$ e si dica quali tra essi sono punti di massimo assoluto e di minimo assoluto per f.



Teoria 1. Cosa si può dire sull'integrabilità in senso improprio o generalizzato in x_0 di f nota quella di g qualora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = c$$

con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$? *Delinearne la dimostrazione (extracredito).*

Teoria 2. Cos'è il gradiente di una funzione f? Esiste una condizione necessaria sul gradiente di f affinché un punto sia di massimo/minimo locale? Questa condizione è anche sufficiente?

Svolgimento

Esercizio 1(1). L'unico punto che crea problemi di convergenza in questo integrale è il comportamento della funzione integranda quando x tende a $+\infty$. Poiché $\sin y \sim y$ quando y tende a zero, l'asintotica della integranda a $+\infty$ è come quella di $x^{\alpha-1}$, di conseguenza l'integrale converge se e solo se $1-\alpha > 1$, ovvero $\alpha < 0$.

Quando $\alpha = -2$ possiamo integrare per sostituzione ponendo $y = 1/x$, $dy = -1/x^2\,dx$, da cui si ottiene

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} x^{-2}\sin\frac{1}{x}\,dx = -\int_{\pi}^{0}\sin y\,dy = \cos y\Big|_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos\pi = 2$$

Esercizio 1(2). L'unico punto che crea problemi di convergenza in questo integrale è il comportamento della funzione integranda quando x tende a $+\infty$. Poiché $1-\cos y \sim y^2/2$ quando y tende a zero, l'asintotica della integranda a $+\infty$ è proporzionale quella di $x^{\alpha-2}$, di conseguenza l'integrale converge se e solo se $2-\alpha > 1$, ovvero $\alpha < 1$.

Quando $\alpha = -2$ possiamo integrare per sostituzione ponendo $y = 1/x$, $dy = -1/x^2\,dx$, da cui si ottiene

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} x^{-2}\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,dx = -\int_{\pi}^{0}(1-\cos y)\,dy = (y-\sin y)\Big|_{0}^{\pi} = \pi$$

Esercizio 2(1). Si tratta di una serie di potenze composta con la funzione e^x. Il raggio di convergenza di questa serie di potenze è il reciproco di

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}} = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{-k} = \lim_{h\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-h}\right)^2 = e^{-2},$$

ovvero e^2.

Si ha quindi la convergenza assoluta quando l'argomento della serie di potenze è nell'intervallo aperto $]-e^2, e^2[$, ovvero quando $e^x \in]-e^2, e^2[$, ovvero quando $x \in]-\infty, 2[$.

Esercizio 2(2). Si tratta di una serie di potenze composta con la funzione $4\arctan x$. Il raggio di convergenza di questa serie di potenze è il reciproco di

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(k\sin\frac{\pi}{k}\right)^{-k}} = \lim_{k\to+\infty}\left(k\sin\frac{\pi}{k}\right)^{-1} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)^{-1} = \pi^{-1},$$

ovvero π.

Si ha quindi la convergenza assoluta quando l'argomento della serie di potenze è nell'intervallo aperto $]-\pi,\pi[$, ovvero quando $4\arctan x \in]-\pi,\pi[$, ovvero quando $x \in]-1,1[$.

Esercizio 3(1 e 2). I due esercizi differiscono per lo scambio delle variabili; svolgiamo quello del tema 1.

I punti interni si trattano immediatamente. Infatti il gradiente di f è $2(x,-y)$ e quindi ha come solo punto critico l'origine, che è una sella e che non appartiene all'interno del dominio bensì al bordo e che, per non dimenticarci, chiamiamo $C_1 = (0,0)$.

Usando i moltiplicatori di Lagrange si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda(1-x^2) \\ -2y = \lambda y \\ \dfrac{y^2}{2} - x\left(\dfrac{x^2}{3}-1\right) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha che $\lambda = -2$ oppure $y = 0$. Seguendo il primo caso si ha che $x = x^2 - 1$, e quindi che $x = (1\pm\sqrt{5})/2$. Solo la soluzione con il segno meno è nella regione che stiamo prendendo in considerazione. Sostituendo infine nell'ultima equazione si ottiene che $y^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Si ottengono quindi i due punti critici

$$C_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}}\right), \qquad C_3 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)$$

Seguendo il secondo caso si ha che $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{3}$, che porge nuovamente l'origine ed il punto critico $C_4 = (-\sqrt{3}, 0)$ (la soluzione positiva è fuori dal dominio). In entrambe i casi esiste un λ che soddisfi alla prima equazione.

Il valore della funzione nei punti critici è $f(C_1) = 0$, $f(C_4) = 3$, ed $f(C_2) = f(C_3) = \left(7 - 5\sqrt{5}\right)/6$. Siccome $3 > 0 > \left(7 - 5\sqrt{5}\right)/6$ si ha che i punti critici C_2, C_3 sono minimi globali, mentre il punto critico C_4 è massimo globale.