SOLUZIONI COMPITO 25/3/2014

ESERCIZIO 1

a) $$\int \frac{1}{27x^4+x}\,dx = \int \frac{(1+27x^3)-27x^3}{x(27x^3+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{27x^2}{27x^3+1}\,dx$$

$$= \log|x| - \frac{1}{3}\log|27x^3+1| + C$$

b) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{27x^4+x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{27x^4+x}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\log|x| - \frac{1}{3}\log|27x^3+1|\right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{3}\left[\log|x|^3 - \log|27x^3+1|\right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{x^3}{27x^3+1}\right|\right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{3}\Bigg(\log \underbrace{\frac{\omega^3}{27\omega^3+1}}_{\to \frac{1}{27}} - \log\frac{1}{28}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{28}{27}.$$

ESERCIZIO 2

Utilizziamo il criterio del rapporto. Poiché

$$\lim_{K\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{9(K+1)}}{9^{K+1}\sqrt{K+1}}}{\dfrac{x^{9K}}{9^K\sqrt{K}}} \right| = \lim_{K\to+\infty} \left| \frac{x^9}{9}\sqrt{\frac{K}{K+1}} \right| = \frac{|x|^9}{9},$$

possiamo dedurre che

- se $\frac{|x|^9}{9}<1$ (ovvero se $x\in\,]-\sqrt[9]{9},\sqrt[9]{9}[$), la serie è assolutamente convergente;
- se $\frac{|x|^9}{9}>1$ (ovvero se $x>\sqrt[9]{9}$ oppure $x<-\sqrt[9]{9}$), la serie non è convergente.

Analizziamo i casi restanti: $x = \pm \sqrt[9]{9}$.

- Se $x = \sqrt[9]{9}$, la serie da studiare è $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}}$ ed essa è divergente ($+\infty$) in quanto armonica generalizzata di esponente $\frac{1}{2} < 1$.
- Se $x = -\sqrt[9]{9}$, la serie da studiare è

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt[9]{9}\right)^{9K}}{9^K \sqrt{K}} = \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Essa è convergente per il criterio di Leibnitz in quanto la successione $a_K := \frac{1}{\sqrt{K}}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

ESERCIZIO 3

a) Poiché:

- la funzione f è continua su $\mathbb{R}^2$
- il dominio D è la palla chiusa di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{2}$ e, quindi, è un insieme chiuso e limitato

il teorema di Bolzano-Weierstrass assicura che f assume massimo e minimo assoluto su D. Cerchiamoli.

Cerchiamo candidati nella parte interna $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$.

Poiché la funzione ammette derivate parziali

$$f'_x(x,y) = 4x^3 \qquad f'_y(x,y) = 3y^2$$

su tutto $\mathbb{R}^2$, i candidati che cerchiamo saranno punti critici.

Poiché $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$,

l'unico punto critico è l'origine $(0,0)$.

Cerchiamo candidati sul bordo $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$.

Poniamo $g(x,y) := x^2 + y^2$. Calcoliamo le derivate parziali di f e g:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x^3 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'_x(x,y) = 2x \\ g'_y(x,y) = 2y \end{cases}$$

le derivate parziali di f e g sono continue su $\mathbb{R}^2$; pertanto, sia f che g sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ e, in particolare, sono differenziabili. L'unico punto (x,y) in cui $\nabla g(x,y)=(0,0)$ è l'origine $(0,0)$, che escludiamo in quanto $(0,0)\notin \partial D$. Gli unici candidati sono dunque quelli che soddisfano il sistema del moltiplicatore di Lagrange:

$$\begin{cases} 4x^3 = 2\lambda x \\ 3y^2 = 2\lambda y \to y(3y-2\lambda)=0 \begin{cases} y=0 \to x=\pm\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{3}{2}y \end{cases} \\ x^2+y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 = 3xy \to x(4x^2-3y) \begin{cases} x=0 \to y=\pm\frac{1}{2} \\ y=\frac{4}{3}x^2 \to x^2+\frac{16}{9}x^4=\frac{1}{4} \end{cases} \\ x^2+y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{16}{9}x^4+x^2-\frac{1}{4}=0$$

Risolviamo l'equazione $\frac{16}{9}x^4+x^2-\frac{1}{4}=0$ ponendo $x^2=z$ (si noti che z deve dunque essere positivo!), da cui

$$\frac{16}{9}z^2+z-\frac{1}{4}=0 \qquad z=\begin{cases} -\frac{3}{4} \text{ (da scartare)} \\ \frac{3}{16} \to x=\pm\frac{\sqrt{3}}{4} \to y=\frac{4}{3}x^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Infine, confrontiamo i valori di f nei vari candidati:

$f(0,0)=0$

$f(\pm\frac{1}{2},0)=\frac{1}{16}$

$f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$ MASSIMO

$f(0,-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$ MINIMO

$f(\pm\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4})=\frac{9}{4^4}+\frac{1}{4^3}=\frac{9+4}{4^4}=\frac{13}{4^2\cdot 4^2}<\frac{16}{16\cdot 16}=\frac{1}{16}$

c) $$f'_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t^5}{3t^4}-0}{t}=\frac{2}{3}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{3t^6}{5t^4}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{5}t=0.$$

ESERCIZIO 4

c) L'integrale ha un'unica singolarità in $+\infty$, infatti

$$x \in [1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{x} \in (0,1] \Rightarrow \sin\frac{1}{x} \in (0, \sin 1]$$

($\sin t$ è crescente in $(0,1]$).

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^{7\alpha}}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{5\alpha}}{\cancel{\frac{1}{x^{7\alpha}}}\cdot\frac{1}{x^{5\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)^{5\alpha} = 1 \in (0,+\infty),$$

per il criterio del confronto asintotico possiamo dedurre che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7\alpha}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{5\alpha} dx \text{ è convergente (divergente a } +\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7\alpha}}\frac{1}{x^{5\alpha}}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{12\alpha}}\,dx \text{ è conv. (div. a } +\infty)$$

$$\Longleftrightarrow 12\alpha > 1 \ (\leq) \Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{12} \ \left(\alpha \leq \frac{1}{12}\right)$$