Università degli Studi di Padova

C.L. Statistica — Analisi II
II Appello— 30 Giugno 2014
Durata: 1 ora e 45 minuti

**Esercizio 1.** Si calcolino tutte le primitive della funzione

$$\frac{2x+x^4}{x^3-1}.$$

**Esercizio 2.** Si determini l'insieme dei parametri reali $\alpha \neq 1$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$$

converge assolutamente e, per tali parametri, si scriva il limite della serie.

**Esercizio 3.** Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3(x^2+y^2)$$

ed il vincolo

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Si calcolino i punti critici di $f$ ristretta ad $M$ (non è richiesto di determinare i massimi e minimi assoluti).

**Teoria 1.** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

**Teoria 2.** Enunciare il teorema di Schwarz sulla commutazione delle derivate. Questo teorema dice qualcosa sulla forma della matrice Hessiana?

**Esercizio 1.** si comincia dividendo il numeratore. La funzione si riscrive come

$$x+\frac{3x}{x^3-1}.$$

Le primitive di $x$ sono

$$\frac{x^2}{2}+c. \tag{1}$$

Bisogna ora integrare il secondo membro. Siccome

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

si ha che

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

e quindi le primitive sono la somma delle primitive trovate sopra, di $\log|x-1|$, e di una primitiva del secondo membro che si riscrive come

$$-\frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2+x+1}=-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\frac{3}{x^2+x+1}.$$

Il primo termine si integra subito ponendo $y=x^2+x+1$, $dy=2x+1$, e porge

$$-\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| \tag{2}$$

(il valore assoluto non fa male ma in realtà non serve visto che l'argomento è sempre positivo), mentre il secondo termine si trasforma in

$$\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{3}{2}\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{3}$$

La somma di (1)+(2)+(3) è la generica primitiva della funzione data.

**Esercizio 2.** Si tratta di una serie geometrica di ragione $(2+\alpha)/(1-\alpha)$ la quale converge assolutamente se e solo se la ragione è minore di 1 in modulo (se la ragione è in modulo maggiore od uguale ad 1 la serie diverge od è indeterminata a seconda che questa sia positiva o negativa). Si ha quindi che la serie converge assolutamente se e solo se

$$-1<\frac{2+\alpha}{1-\alpha}<1.$$

Se $1-\alpha>0$ allora le due condizioni sopra diventano $-1+\alpha<2+\alpha<1-\alpha$, ovvero $-1<2$ ed $\alpha<-1/2$, che porge la seconda condizione (assieme ad $\alpha<1$, che non cambia la regione). Se $1-\alpha<0$ allora la condizione sopra diventa $-1+\alpha>2+\alpha>1-\alpha$ che è un assurdo ($-1>2$). Quindi la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha<-1/2$. In tale regione si usa il fatto che $\sum r^n=1/(1-r)$, e quindi il limite è

$$\frac{1}{1-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}}=\frac{1-\alpha}{1-\alpha-2-\alpha}=\frac{1-\alpha}{1+2\alpha}.$$

**Esercizio 3.** Il gradiente della funzione è $\nabla f = 3(x^2 - 2x, y^2 - 2y)$ e nel dominio in questione ha solo la soluzione $(0, 0)$ (ha altri 3 punti critici, che sono $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, ma non appartengono al dominio). Sul bordo si studia il sistema

$$x(3x - (6 + 2\lambda)) = 0, \quad y(3y - (6 + 2\lambda)) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

La prima equazione porge le due soluzioni $x = 0$ oppure $x = 2 + 2/3\lambda$. Nel primo caso dalla terza equazione si deduce che $y = \pm 1$ (per le quali esiste una scelta di $\lambda$ che renda vera la seconda equazione). Si hanno quindi i due punti critici $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Nel secondo caso dalla seconda equazione si ha che o $y = 0$, che porge le due soluzioni $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ oppure $y = 2 + 2/3\lambda = x$. Usando la terza equazione si hanno quindi che le uniche altre due possibilità sono $x = y = \sqrt{2}/2$ oppure $x = y = -\sqrt{2}/2$.