Istituzioni di Analisi Matematica 2 - Appello 30/6/2014

ESERCIZIO 1

a) Utilizzando la sostituzione $e^x+9=t^2$, $e^x dx = 2t\,dt$,

ricaviamo

$$\int\sqrt{e^x+9}\,dx = \int\frac{\sqrt{e^x+9}}{e^x}\,e^x dx = \int\frac{t}{t^2-9}\,2t\,dt$$

$$= 2\int\frac{t^2-9+9}{t^2-9}\,dt$$

$$= 2\int 1\,dt + 3\int\frac{6}{t^2-9}\,dt$$

$$= 2t + 3\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$= 2t + 3\log|t-3| - 3\log|t+3| + c$$

$$= 2\sqrt{e^x+9} + 3\log\left|\sqrt{e^x+9}-3\right| - 3\log\left|\sqrt{e^x+9}+3\right| + c$$

c) Si ha

$$F'(x) = \frac{\sin(3x^2+1)}{3+e^{3x^2+1}}(3x^2+1)' - \frac{\sin(3x)}{3+e^{3x}}(3x)'$$

$$= \frac{6x\sin(3x^2+1)}{3+e^{3x^2+1}} - \frac{3\sin(3x)}{3+e^{3x}}$$

ESERCIZIO 2

Utilizziamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\left(\frac{\sqrt{14+x^2}}{2+x^2}\right)^k\right|} = \lim_{k\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}_{\to 1}\left(\frac{\sqrt{14+x^2}}{2+x^2}\right) = \frac{\sqrt{14+x^2}}{2+x^2}.$$

Poiché

$$\frac{\sqrt{14+x^2}}{2+x^2}<1 \iff \sqrt{14+x^2}<2+x^2 \iff 14+x^2<x^4+4x^2+4$$

$$\iff x^4+3x^2-10>0$$

$$\iff x^2>2 \text{ oppure } x^2<-5 \longrightarrow \text{falso } \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\iff x>\sqrt{2} \text{ oppure } x<-\sqrt{2},$$

deduciamo che

- se $x > \sqrt{2}$ oppure $x < -\sqrt{2}$, la serie è assolutamente convergente (in particolare, è convergente)
- se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, la serie non è convergente. Poiché è a termini positivi, essa è divergente a $+\infty$.

Studiamo a parte i casi $x = \pm\sqrt{2}$. La serie da considerare diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{\sqrt{14+2}}{2+2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(cioè la serie armonica) che è divergente a $+\infty$.

c) Poiché

- $\frac{k}{k^2+25} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{k \to +\infty} \frac{k}{k^2+25} = 0$
- $\frac{k+1}{(k+1)^2+25} \leq \frac{k}{k^2+25} \quad \forall k \geq 5$

[Infatti la funzione $f(x) := \frac{x}{x^2+25}$ è decrescente nell'intervallo $[5, +\infty)$, dato che

$$f'(x) = \frac{x^2+25-2x^2}{(x^2+25)^2} = \frac{25-x^2}{(x^2+25)^2} \leq 0 \quad \forall x \in [5, +\infty)$$
]

grazie al criterio di Leibnitz possiamo concludere che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+25}$ è convergente.

ESERCIZIO 3

a) Poichè le derivate parziali

$$f'_x(x,y) = 2x(y^2-2y) = 2xy(y-2)$$

$$f'_y(x,y) = (x^2-1)(2y-2) = 2(x^2-1)(y-1)$$

esistono su tutto $\mathbb{R}^2$, eventuali massimi e minimi saranno anche punti critici. Risolviamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} 2xy(y-2)=0 \implies x=0 \text{ oppure } y=0 \text{ oppure } y=2 \\ 2(x^2-1)(y-1)=0 \end{cases}$$

Se $x=0$, dalla seconda equazione ricaviamo $y=1$.

Se $y=0$, " " " " $x=1$ o $x=-1$.

Se $y=2$, " " " " $x=1$ o $x=-1$.

Abbiamo pertanto 5 punti critici:

$(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,2)$ e $(-1,2)$.

Si ha inoltre

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y(y-2) & 4x(y-1) \\ 4x(y-1) & 2(x^2-1) \end{pmatrix}$$

le derivate del second'ordine di f sono continue, pertanto f è due volte differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Pertanto

- poichè $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante 4 e $f''_{xx}(0,1) = -2 < 0$, $Hf(0,1)$ è definita negativa e $(0,1)$ è un massimo relativo forte
- poichè le matrici $Hf(1,0) = Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e $Hf(-1,0) = Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ hanno tutte determinante $-16 < 0$, i punti $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,2)$ e $(-1,2)$ sono punti di sella.

b) Poiché f non ammette minimi relativi, essa non può assumere minimo assoluto. Inoltre si ha

$$\lim_{y \to +\infty} f(2,y) = \lim_{y \to +\infty} 3(y^2-2y) = +\infty$$

Questo implica che $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$; in particolare, f non ammette massimo assoluto.