Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci

Vicenza 22/5/2008.

Esercizi di autoverifica. 3. Integrali di superficie.

1. Date la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z): \ x = s\sin(t/2), \quad y = 2t, \quad z = s\cos(t/2), \quad t \in]0,4\pi[, \ s \in]1,3[\}$$

e la funzione $f(x,y,z) = xy$, calcolare $\int_\Sigma f \, d\sigma$.

2. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{(x,y,z): \ 0 \le y \le 4, \quad z \ge 1 - \frac{y}{4}, \quad x^2+z^2 = 1\right\}.$$

3. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{(x,y,z): \ \frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1, \quad |z| \le 4\right\}.$$

4. Sia γ l'arco di cicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t). \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \quad (a > 0)$$

Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione di γ attorno all'asse y di 2π.
(Si ricorda la formula di Werner: $\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ per ogni a, b)

5. Sia A l'insieme piano racchiuso tra l'arco di cicloide γ dell'es. 4 e l'asse x. Calcolare l' integrale nell'insieme A delle funzioni $f(x,y) = 2y$ e $g(x,y) = x+2y$.
(Sugg. L'arco di cicloide γ (come si deduce dal disegno!) é una curva rappresentabile in forma cartesiana $y = y(x)$ con $x \in [0, 2\pi a]$. Non serve essere in grado di scrivere questa funzione $y(x)$ esplicitamente per risolvere l'es...)

6. Sia A l'insieme dell'es. 5. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di A attorno all'asse x.

7. Calcolare l'area della superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = e^u \sin v \\ y = e^u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$$

dove $0 \le u \le \log 4, \ \ \pi/2 \le v \le \pi$.

8. Si calcoli $\int_\Sigma f \, d\sigma$, dove $f(x,y,z) = 2x+2y+z$ e Σ è la porzione di piano

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \ x+y+z = 0, \quad x^2+y^2 \le 1, \quad y \ge 0\right\}.$$

9. Si disegni la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\varphi(\theta, y) = (\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+1}\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad |y| \leq 1$$

e se ne calcoli l'area.

10. Si disegni e si parametrizzi la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < y < 2, \quad x^2 + z^2 = y^2 + 1\right\}.$$

Si calcoli il versore normale alla superficie e il piano tangente nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, 1, 0)$. Si calcoli inoltre il baricentro.