

Esercizi di autoverifica. 3. Integrali di superficie.

1. Date la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x = s \sin(t/2), \quad y = 2t, \quad z = s \cos(t/2), \quad t \in]0, 4\pi[, \quad s \in]1, 3[\}$$

e la funzione $f(x, y, z) = xy$, calcolare $\int_{\Sigma} f d\sigma$.

2. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq y \leq 4, \quad z \geq 1 - \frac{y}{4}, \quad x^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

3. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{ (x, y, z) : \frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1, \quad |z| \leq 4 \right\}.$$

4. Sia γ l'arco di cicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0)$$

Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione di γ attorno all'asse y di 2π .

(Si ricorda la formula di Werner: $\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ per ogni a, b)

5. Sia A l'insieme piano racchiuso tra l'arco di cicloide γ dell'es. 4 e l'asse x . Calcolare l'integrale nell'insieme A delle funzioni $f(x, y) = 2y$ e $g(x, y) = x + 2y$.

(Sugg. L'arco di cicloide γ (come si deduce dal disegno!) é una curva rappresentabile in forma cartesiana $y = y(x)$ con $x \in [0, 2\pi a]$. Non serve essere in grado di scrivere questa funzione $y(x)$ esplicitamente per risolvere l'es...)

6. Sia A l'insieme dell'es. 5. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di A attorno all'asse x .

7. Calcolare l'area della superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = e^u \sin v \\ y = e^u \cos v \\ z = \cos v \end{cases}$$

dove $0 \leq u \leq \log 4$, $\pi/2 \leq v \leq \pi$.

8. Si calcoli $\int_{\Sigma} f d\sigma$, dove $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ e Σ è la porzione di piano

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}.$$

9. Si disegni la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\varphi(\theta, y) = (\sqrt{y^2 + 1} \cos \theta, y, \sqrt{y^2 + 1} \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad |y| \leq 1$$

e se ne calcoli l'area.

10. Si disegni e si parametrizzi la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 2, \quad x^2 + z^2 = y^2 + 1\}.$$

Si calcoli il versore normale alla superficie e il piano tangente nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, 1, 0)$. Si calcoli inoltre il baricentro.