Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Vicenza 28/5/07.

Soluzioni degli esercizi di autoverifica. 3. Integrali di superficie.

1. Date la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \ x = s\sin(t/2), \quad y = 2t, \quad z = s\cos(t/2), \quad t \in]0, 4\pi[, \ s \in]1, 3[\}$$

e la funzione $f(x, y, z) = xy$, calcolare $\int_\Sigma f \, d\sigma$.

Sol. Detta $\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ la superficie in forma parametrica sopra definita sul dominio $D =]1, 3[\times]0, 4\pi[$, si ha

$$\varphi_s \wedge \varphi_t = (-2\cos(t/2), s/2, 2\sin(t/2)), \qquad |\varphi_s \wedge \varphi_t| = \sqrt{4 + \frac{s^2}{4}}.$$

Per definizione di integrale di superficie, si deve calcolare

$$\int_\Sigma xy \, d\sigma = 2\left(\int_0^{4\pi} t\sin(t/2)\, dt\right) \cdot \left(\int_1^3 s\sqrt{4 + \frac{s^2}{4}}\, ds\right).$$

Integrando per parti il primo integrale ed operando la sostituzione $\sigma = 4 + \frac{s^2}{4}$ nel secondo si ottiene

$$\int_\Sigma xy \, d\sigma = 2\left[4\sin(t/2) - 2t\cos(t/2)\right]_0^{4\pi} \cdot \left[\frac{4}{3}\left(4 + \frac{s^2}{4}\right)^{3/2}\right]_1^3 = -16\pi\frac{1}{6}[5^3 - 17^{3/2}].$$

2. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{(x, y, z) : \ 0 \le y \le 4, \quad z \ge 1 - \frac{y}{4}, \quad x^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Sol. La superficie S é costituita dalla parte del cilindro di asse y, a base circolare di raggio 1 e altezza $y = 4$ che sta sopra al piano di equazione $z = 1 - \frac{y}{4}$. É quindi opportuno introdurre le coordinate cilindriche di asse y per descrivere il cilindro $x^2 + z^2 = 1$:

$$\varphi \ \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = y \\ z = \sin\theta \end{cases}$$

Le disequazioni $0 \le y \le 4$ e $z \ge 1 - \frac{y}{4}$ determinano il dominio di φ (fare il disegno!):

$$D = \{(\theta, y) : \ 0 \le \theta \le \pi, \qquad 4(1 - \sin\theta) \le y \le 4\}.$$

Si ha $|\varphi_\theta \wedge \varphi_y| = 1$. Quindi

$$A(S) = \int_0^\pi \left(\int_{4(1-\sin\theta)}^4 dy\right) d\theta = 8.$$

3. Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{ (x,y,z) : \; \frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1, \quad |z| \le 4 \right\}.$$

Sol. L' equazione $\frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una superficie di rotazione attorno all' asse z. La sua proiezione nel piano O, y, z é l' iperbole $\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$. Quindi S é la parte di iperboloide racchiusa tra i piani $z = -4$ e $z = 4$ (fare il disegno!). Per simmetria, $A(S) = 2A(S^*)$, se S^* rappresenta la porzione di S con $z > 0$. D'altra parte, S^* si ottiene dalla rotazione di 2π dell'arco di iperbole di equazione $\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$ con $y \ge 0$ attorno all' asse z. Possiamo applicare il Teorema di Guldino, dopo aver scritto l'iperbole in forma parametrica: $\gamma(y) = (y, 2\sqrt{1+y^2})$ con $y \in [0, \sqrt{3}]$, per cui $|\gamma'(y)| = \sqrt{1 + \frac{4y^2}{1+y^2}}$:

$$A(S) = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} y \sqrt{1 + \frac{4y^2}{1+y^2}}\, dy.$$

Poiché $\sqrt{1 + \frac{4y^2}{1+y^2}} = \sqrt{\frac{1+5y^2}{1+y^2}} = \sqrt{5 - \frac{4}{1+y^2}}$, prima sostituiamo $t = 1 + y^2$ e otteniamo

$$A(S) = 2\pi \int_1^4 \sqrt{5 - \frac{4}{t}}\, dt.$$

Poi poniamo $s = \sqrt{5 - \frac{4}{t}}$, per cui $t = \frac{4}{5 - s^2}$ e otteniamo

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 \frac{8s^2}{(5-s^2)^2}\, ds.$$

A questo punto, il conto é lungo ma standard (si devono trovare A, B, C e D tali che

$$\frac{8s^2}{(5-s^2)^2} = \frac{A}{\sqrt{5}-s} + \frac{B}{(\sqrt{5}-s)^2} + \frac{C}{\sqrt{5}+s} + \frac{D}{(\sqrt{5}+s)^2}$$

e quindi si hanno 4 integrali immediati...)

4. Sia γ l'arco di cicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi \quad (a > 0)$$

Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione di γ attorno all'asse y di 2π.
(Si ricorda la formula di Werner: $\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ per ogni a, b)

Sol. Detta Σ la superficie sopra descritta, per il Teorema di Guldino:

$A(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt.$

Per le formule di bisezione, $\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = \sin(t/2)$ (con segno sempre positivo per $t \in [0, 2\pi]$), quindi

$$A(\Sigma) = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Integrando per parti, $\int t \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) + c$ (vedi es. 1), mentre $\sin t \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\cos(t/2)-\cos(3t/2)}{2}$ per la formula di Werner. In conclusione,

$$A(\Sigma) = 4\pi a^2 \left[-2t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 16\pi^2 a^2.$$

5. Sia A l'insieme piano racchiuso tra l'arco di cicloide γ dell'es. 4 e l'asse x. Calcolare l' integrale nell'insieme A delle funzioni $f(x,y) = 2y$ e $g(x,y) = x + 2y$.

Sol. L'arco di cicloide γ (come si deduce dal disegno!) é una curva rappresentabile in forma cartesiana $y = y(x)$ con $x \in [0, 2\pi a]$. Non serve essere in grado di scrivere questa funzione $y(x)$ esplicitamente. Infatti, A diventa $A = \{(x,y): \ x \in [0, 2\pi a], \quad 0 \le y \le y(x)\}$ e per le formule di riduzione si ha

$$I_1 = \int_A 2y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi a}\left(\int_0^{y(x)} 2y\,dy\right)dx = \int_0^{2\pi a} y^2(x)\,dx.$$

Ora, adottando il cambiamento di variabile $x = a(t - \sin t)$, si ottiene che $y(x) = a(1-\cos t)$ e $dx = a(1-\cos t)dt$:

$$I_1 = a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^3 t - 3\cos t + 3\cos^2 t)\,dt$$

dove tutti gli integrali sono noti..

Analogamente,

$$I_2 = \int_A (x+2y)\,dx\,dy = \int_A x\,dx\,dy + I_1 = \int_0^{2\pi a} x\left(\int_0^{y(x)} dy\right)dx = \int_0^{2\pi a} xy(x)\,dx + I_1.$$

Basta quindi calcolare $I_3 = \int_A x\,dx\,dy$, procedendo con la sostituzione di prima:

$$I_3 = a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt = a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1+\cos^2 t - 2\cos t)\,dt$$

dove con qualche integrazione per parti si conclude..

6. Sia A l'insieme dell'es. 5. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di A attorno all'asse x.

Sol. Per il Teorema di Guldino, detto S il solido sopra descritto, si ha

$$V(S) = 2\pi\int_A y\,dx\,dy = \pi I_1,$$

dove I_1 é l' integrale calcolato nell'es. precedente.

7. Calcolare l'area della superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = e^u \sin v \\ y = e^u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$$

dove $0 \leq u \leq \log 4,\ \ \pi/2 \leq v \leq \pi$.

Sol. Detta φ la superficie parametrica assegnata, si ha

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{2}e^u \sin^2 v$$

e

$$A(\varphi) = \sqrt{2}\left(\int_0^{\log 4} e^u\, du\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 v\, dv\right) = 3\sqrt{2}\frac{\pi}{4}.$$

8. Si calcoli $\int_\Sigma f\, d\sigma$, dove $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ e Σ è la porzione di piano

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\right\}.$$

Sol. La superficie data puó essere scritta in forma cartesiana come $z = -x - y$, con $(x,y) \in D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}$. Quindi $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{3}$ e quindi dobbiamo calcolare

$$I = \int_D f(x,y,-x-y) \cdot \|\varphi_x \wedge \varphi_y\|\, dx\, dy = \sqrt{3}\int_D (2x + 2y + (-x-y))\, dx\, dy,$$

che parametrizzando D diventa (si può anche fare in coordinate polari)

$$I = \sqrt{3}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\, dy\right) dx = \sqrt{3}\int_{-1}^{1}\left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)\right) dx.$$

Ora, il primo integrando é dispari su dominio simmetrico, quindi ha integrale 0. Resta solo

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

9. Si disegni la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\varphi(\theta, y) = (\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+1}\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad |y| \leq 1$$

e se ne calcoli l'area.

Sol. È una superficie di rotazione attorno all'asse y (basta pensare di porre $\rho = \sqrt{y^2+1}$ e si vede immediatamente). Facendo $x^2 + z^2$ si ottiene $x^2 + z^2 = y^2 + 1$, che proiettata nel piano O, x, y é l'equazione di un'iperbole: $x^2 - y^2 = 1$ con le y in $[-1, 1]$. Calcoliamo

$$\|\varphi_\theta \wedge \varphi_y\| = \|\left(-\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, -\sqrt{y^2+1}\sin\theta\right)\| = \sqrt{1+2y^2}.$$

L'area della superficie: $A = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{2y^2+1}dy\right) d\theta = 4\pi\int_0^1 \sqrt{2y^2+1}dy$.

Usando la sostituzione $\sqrt{2}y = \sinh w$ si ottiene

$\int_0^1 \sqrt{2y^2+1}dy = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}y\sqrt{2y^2+1} - arcsenh\sqrt{2}y)\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{6} - arcsenh\sqrt{2})$.

10. Si disegni e si parametrizzi la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < y < 2, \quad x^2 + z^2 = y^2 + 1\right\}.$$

Si calcoli il versore normale alla superficie e il piano tangente nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, 1, 0)$. Si calcoli inoltre il baricentro.

Sol. Dalla soluzione dell'es. 9 si deduce che la superficie ora considerata é la stessa di prima, solo che ora si prende $y \in]0, 2[$ invece di $y \in] - 1, 1[$. Possiamo quindi usare la parametrizzazione $\varphi(\theta, y)$ di sopra ed il calcolo di $\|\varphi_\theta \wedge \varphi_y\|$ giá svolto. Il punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ corrisponde a $(\theta_0, y_0) = (0, 1)$. In tal caso il versore normale in P_0 è $\nu(0, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{2}, 1, 0)$. Il piano tangente si ottiene cercando i punti $P = (x, y, z)$ tali che

$$(P - P_0) \cdot \nu(0, 1) = 0,$$

cioè $y - \sqrt{2}x + 1 = 0$.

L'area A della superficie si calcola analogamente all'esercizio precedente: $A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{2y^2 + 1}dy\right) d\theta$.

Per motivi di simmetria il baricentro P_0 sarà tale che $x_0 = z_0 = 0$.

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 y\sqrt{2y^2 + 1}dy\right) d\theta.$$

Facciamo il calcolo dell'integrale al numeratore $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 y\sqrt{2y^2 + 1}dy\right) d\theta = \frac{26\pi}{3}$.