Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale,
Paola Mannucci

Vicenza 9/5/08

Soluzioni degli esercizi di autoverifica. 2. Integrali doppi e tripli.

1. Calcolare
$$I = \int_D \frac{x}{x^2+y^2} dx\, dy,$$
dove $D = \{(x,y) : \ x^2/2 \le y \le x^2, \ 1 < x < 2\}$.

Sol. Per le formule di riduzione, si ha
$$I = \int_1^2 \left(\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{(1/x)}{1+(y/x)^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \arctan(y/x)\big|_{x^2/2}^{x^2} dx = \int_1^2 [\arctan(x) - \arctan(x/2)]\, dx.$$
Integrando per parti,
$$\int 1 \arctan(x)\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c,$$
$$\int 1 \arctan(x/2)\, dx = x \arctan(x/2) - \int \frac{x/2}{1+(x/2)^2}\, dx = x \arctan(x/2) - \log(1+(x/2)^2) + c,$$
quindi
$$I = \left[x(\arctan x - \arctan(x/2)) + \log\left(\frac{1+(x/2)^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_1^2.$$

2. Calcolare
$$I = \int_D \frac{\tan(x+y)}{x+y} dx\, dy,$$
dove $D = \{(x,y) : \ x+y < 1, \ x, \ y > 0\}$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x+y$, $v = x-y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é
$$\left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 2$$
e, poiché $u+v = 2x$, $u-v = 2y$, otteniamo che l'insieme D nelle coordinate (u,v) diventa
$$T = \{(u,v) : \ 0 < u < 1, \ -u < v < u\}.$$
Quindi (ricordiamo che questa é Φ^{-1} rispetto al libro, per cui "$dx\, dy = \frac{1}{2} du\, dv$"..)
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} \frac{\tan(u)}{u}\, dv \right) du = \int_0^1 u \frac{\tan(u)}{u}\, du = [-\log(\cos u)]_0^1.$$

3. Calcolare il volume ed il baricentro del solido omogeneo (di densitá 1) dato da

$$S = \left\{(x, y, z) : \; y \geq 0, \; 8(x^2 + z^2) - 4y^2 \leq 1, \; x^2 + z^2 - y^2 \geq 0\right\}.$$

Sol. Poiché S é un solido di rotazione attorno all' asse y, determiniamo la proiezione E di S nel piano $0, x, y$. Si ha

$$E = \left\{(x, y) : \; y \geq 0, \; 8x^2 - 4y^2 \leq 1, \; x^2 \geq y^2\right\} = \left\{(x, y) : \; 8x^2 - 4y^2 \leq 1, \; 0 \leq y \leq |x|\right\},$$

dove l'equazione $8x^2 - 4y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole. Detta E^* la porzione di E contenuta nel primo quadrante, possiamo rappresentare E^* come insieme normale rispetto ad y:

$$E^* = \left\{(x, y) : \; y \in [0, 1/2], \quad y \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4y^2}\right\}.$$

Usando il Teorema di Guldino:

$$Vol(S) = 2\pi \int_{E^*} x \, dx \, dy = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\int_y^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}} x \, dx \right) dy = \pi \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{8}(1 + 4y^2) - y^2 \right] dy = \frac{\pi}{24}.$$

Per calcolare le coordinate del baricentro, dalla simmetria di S si deduce immediatamente che $x_G = 0 = z_G$. Resta dunque da calcolare solo $y_G = \frac{1}{Vol(S)} \int_S y \, dx \, dy \, dz$. Pensando di rappresentare S in coordinate cilindriche con asse y, cioé:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = y, \\ z = \rho \sin\theta, \end{cases}$$

si ha (usando la rappresentazione di E^*..) che il trasformato di S nelle nuove coordinate é

$$T = \left\{(\rho, \theta, y) : \; \theta \in [0, 2\pi], \quad y \in [0, 1/2], \quad y \leq \rho \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4y^2}\right\}.$$

Poiché il determinante della matrice Jacobiana é ρ, si ottiene

$$y_G = \frac{24}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} y \left(\int_y^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+4y^2}} \rho \, d\rho \right) dy \right) d\theta = 24 \int_0^{1/2} \left[\frac{y}{8}(1 + 4y^2) - y^3 \right] dy = \frac{3}{16}.$$

4. Calcolare

$$I = \int_Q (x - y) \log(x + y) dx \, dy,$$

dove Q é il quadrilatero compreso nell' intersezione delle rette $y = x - 1$, $y = x$, $y = 1 - x$ e $y = 3 - x$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili invertibile $u = x + y$, $v = x - y$, per cui il modulo del determinante della matrice Jacobiana é 2 (vedi es. 2). L'insieme Q nelle coordinate (u, v) diventa

$$T = \{(u, v) : \; 1 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 1\}.$$

quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\int_0^1 v \log u \, dv \right) du = \frac{1}{4} \int_1^3 \log u \, du = 3 \log 3 - 2.$$

5. Calcolare
$$I = \int_P (3x-y)^2\left(-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right)dx\,dy,$$
dove P é il parallelogramma delimitato dalle rette $y=3x$, $y=x$, $y=3x-1$ e $y=x+4$.

Sol. Consideriamo il cambiamento di variabili invertibile $u=y-x$, $v=3x-y$. L'insieme P diventa
$$T=\{(u,v):\ u\in[0,4],\quad v\in[0,1]\},$$
il determinante della matrice Jacobiana é 2, perció
$$I=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 v^2\,dv\right)\left(\int_0^4 \frac{u}{4}\,du\right)=\frac{1}{3}.$$

6. Disegnare l'insieme
$$C=\left\{(x,y,z):\ z\le 2-\frac{x^2+y^2}{3},\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4\right\}$$
e calcolare
$$\int_C (z-2)dx\,dy\,dz.$$

Sol. L'insieme C é di rotazione attorno all'asse z. L' insieme proiezione di C nel piano O,x,z é
$$E=\left\{(x,z):\ z\le 2-\frac{x^2}{3},\ x^2+(z-2)^2\le 4\right\},$$
dove l' equazione $z=2-\frac{x^2}{3}$ rappresenta una parabola con asse z, di vertice $V(0,2)$ e rivolta verso il basso, mentre $x^2+(z-2)^2=4$ rappresenta una circonferenza di centro $C(0,2)$ e raggio 2. E é dato dai punti (x,z) interni alla circonferenza che stanno sotto la parabola. Detta E^* la porzione di E contenuta nel primo quadrante, E^* risulta normale rispetto ad x:
$$E^*=\left\{(x,z):\ x\in[0,\sqrt{3}],\quad 2-\sqrt{4-x^2}\le z\le 2-\frac{x^2}{3}\right\}.$$
Quindi in coordinate cilindriche con asse z, cioé
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$$
l' insieme C diventa
$$T=\left\{(\rho,\theta,z):\ \theta\in[0,2\pi],\quad \rho\in[0,\sqrt{3}],\quad 2-\sqrt{4-\rho^2}\le z\le 2-\frac{\rho^2}{3}\right\}.$$
Poiché il determinante della matrice Jacobiana é ρ, si ha
$$I=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(\int_{2-\sqrt{4-\rho^2}}^{2-\frac{\rho^2}{3}}(z-2)\,dz\right)d\rho=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(-4+\rho^2+\frac{\rho^4}{9}\right)d\rho=-\frac{13}{4}\pi.$$

7. Calcolare

$$I = \int_E x^2(y-x^3)e^{y+x^3}dx\,dy,$$

dove $E = \{(x,y):\ x^3 \le y \le 3,\ x \ge 1\}$.

Sol. Introduciamo il cambiamento di variabili $u = y - x^3$, $v = y + x^3$. É chiaramente invertibile e la matrice Jacobiana ha determinante di modulo $6x^2$. Quindi l' insieme E nelle nuove coordinate diventa $T = \{(u,v):\ u \in [0,2], \quad u+2 \le v \le -u+6\}$ e l' integrale é

$$I = \frac{1}{6}\int_0^2 u\left(\int_{u+2}^{-u+6} e^v\,dv\right)du = \frac{1}{6}\int_0^2 u\left(e^6e^{-u} - e^2e^u\right)du.$$

Si conclude integrando per parti che $I = \frac{e^2}{6}(e^4 - 4e^2 - 1)$.

8. Calcolare il volume del solido ottenuto intersecando il cilindro di equazione $x^2+y^2-2x \le 0$ con la sfera $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Sol. Non si tratta di un solido di rotazione, ma essendo coinvolti una sfera ed un cilindro con asse l'asse delle z, é sempre conveniente operare un cambiamento di variabili passando alle coordinate cilindriche di asse z. Ragionando sulla proiezione dell'insieme nel piano O,x,y é facile dedurre che il solido dato, detto S, nelle nuove coordinate diventa:

$$T = \left\{(\rho,\theta,z):\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \rho \in [0, 2\cos\theta], \quad -\sqrt{4-\rho^2} \le z \le \sqrt{4-\rho^2}\right\}.$$

Allora,

$$Vol(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho\left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz\right)d\rho\right)d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho\right)d\theta.$$

Usando la solita sostituzione $t = 4-\rho^2$ si ottiene

$$Vol(S) = \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - (1-\cos^2\theta)^{3/2}\right]\,d\theta.$$

Per simmetria, possiamo restringere l' integrale all'intervallo $[0,\pi/2]$ dove $\sin\theta \ge 0$ e quindi ci si riduce a calcolare (scrivendo $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$ e ponendo $t = -\cos\theta$..)

$$Vol(S) = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{32}{3}\left[\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$