

Esercizi di autoverifica. 1. Curve regolari e forme differenziali lineari.

Senza soluzione

1. Scrivere in forma parametrica ed in forma implicita l'equazione della retta tangente a $\gamma : \{\rho(\theta) = (e^\theta + 1) \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ nel punto $P_0 = (2, 0)$.

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la retta tangente alla curva $\gamma : \{x = \arctan[(y + 1)^\alpha], y \in [-1, 1]\}$ nel punto $P_0 = (\pi/4, 0)$ è parallela alla retta $y = x$.

3. Determinare il versore tangente alla curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(3t) \\ z = \log(2 \sin(3t)) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$$

in $(0, 1, \log 2)$.

4. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = \frac{x^2+y}{\sqrt{2+4z^2}}$, calcolare $\int_\gamma f$ dove γ è l'arco di curva, giacente nel semispazio $\{y \leq 0\}$, definito da

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 4 \\ z = t \end{cases} \quad t \in [-2, 2].$$

5. Stabilire in quali regioni del piano la forma differenziale

$$\frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} dx + \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} dy$$

è esatta. Calcolare poi il suo integrale lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = \left(t, \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos t} + \frac{3}{2} + t\right) \quad t \in [0, 1].$$

6. Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y(\log y - 1)}{x^2 + 1} dx + \arctan x \log y dy,$$

definita in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

i. Si dica se è chiusa.

ii. Si dica se è esatta e se ne trovino tutte le eventuali primitive.

iii. Fra tutte le primitive si trovi quella che vale π nel punto $(-1, 1)$.

iv. Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazione $y = -x^3 + 3$, $x \in [-1, 1]$.

7.

Dire se le seguenti forme differenziali lineari in tre variabili sono differenziali esatti e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva:

i)

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} dy + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dz;$$

ii)

$$-\frac{y+z}{(x-y-z)^2} dx + \frac{x}{(x-y-z)^2} dy + \frac{x}{(x-y-z)^2} dz.$$

Con soluzione

1. Trovare l'ascissa del baricentro della curva piana in coordinate polari: $\rho = e^{k\theta}$, $0 < \theta < \pi$ ($k > 0$).

2. Calcolare la lunghezza della curva seguente:

$$\begin{cases} x = 1 - \cos t + (2-t) \sin t \\ y = \sin t + (2-t) \cos t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

3. Data la curva $\varphi(t) = (R \sin t, R \cos t, ht)$ con $0 < t < 2$, determinare l' integrale curvilineo di $f(x, y, z) = xyz$ lungo φ .

4. Sia $\varphi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva regolare. Allora necessariamente si ha che:

- (a) la curva $\psi(t) = (x(t^2), y(t^2), z(t^2))$ con $t \in [0, 2]$, ha $L(\psi) = L(\varphi)$;
- (b) la curva $\psi(t) = (x(1-t), y(1-t), z(1-t))$ con $t \in [0, 1]$, ha $L(\psi) = \frac{1}{2}L(\varphi)$;
- (c) la curva $\psi(t) = (x(\frac{2-t}{3}), y(\frac{2-t}{3}), z(\frac{2-t}{3}))$ con $t \in [-4, 2]$, ha $L(\psi) = L(\varphi)$.

5. Sia $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva semplice e regolare. Allora necessariamente si ha che:

- (a) se ψ é equivalente a φ , anche ψ é una curva semplice e regolare;
- (b) se il sostegno di ψ coincide con il sostegno di φ , allora ψ é equivalente a φ ;

6. Date una funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e una curva in coordinate polari $\rho = \theta$ con $\theta \in [0, \pi]$, dire quale delle seguenti affermazioni é corretta.

- (a) $\int_{\rho} f = \frac{\pi^2}{2}$;
- (b) $\int_{\rho} f = \frac{1}{3}[(1 + \pi^2)^{3/2} - 1]$;
- (c) $\int_{\rho} f = \frac{2}{3}\pi^{3/2}$.

7. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{1/2}} dx + \frac{xy}{x^2 + y^2} dy,$$

dove γ é la curva data da $y = x^2$ con $1/2 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ con l' orientamento delle x crescenti.

8. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{y} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

9. Dire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = [1 + \cos(x + y)]dx + \cos(x + y)dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita come segue: $x = \cos^{35} t$, $y = \sin^{35} t$, con $0 \leq t \leq \pi/2$.

10. Dire se la seguente forma differenziale é esatta se ristretta al primo quadrante e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = \frac{x + 2y}{x^3y}dx + \frac{1}{xy^2}dy.$$

11. Dire se la seguente forma differenziale é esatta nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, calcolare una sua primitiva:

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita, in coordinate polari, come segue: $\rho = 2 - \cos \theta$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$.