Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica
Prof.sse Valentina Casarino e Paola Mannucci

Foglio 1. Esercizi di ripasso sulle funzioni in più variabili

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\,, \qquad f(x,y)=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}\,, \qquad f(x,y)=\arcsin\frac{y-1}{x+1}\,,$$

$$f(x,y)=\frac{1}{16-x^2-y^2}\,, \qquad f(x,y)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{y}\,, \qquad f(x,y,z)=\log(1-x^2-y^2-z^2)\,.$$

2. Per ciascuno dei domini precedenti stabilire se si tratta di un insieme limitato, chiuso o aperto.

3. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni

$$f(x,y)=e^{x/y}\,, \qquad f(x,y)=y^{\log x}\,, \qquad f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$$

4. Dimostrare che la funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita da $(x,y,z)\mapsto\sin(xz^2+y^2)$ è continua su $\mathbb{R}^3$.

5. Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

dimostrare che essa è derivabile in $(0,0)$, ma non è ivi differenziabile.

6. Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

dimostrare che essa ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma non è ivi differenziabile.

8. Dimostrare che la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ xy & \text{se } x<0\,,\end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$. Dimostrare inoltre che essa possiede tutte le derivate direzionali ed è differenziabile in ogni punto della forma (x_0,y_0), con $x_0\neq 0$, e nel punto $(0,1)$.

9. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto indicato

$$f(x,y)=\log(x^2+y^2)\ \text{in}\ (-2,2)\,, \qquad f(x,y)=y^{\log x}\ \text{in}\ (e^2,2)\,.$$

10. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni

$$f(x,y,z) = x^2y + x^2 - 2y\,, \qquad f(x,y,z) = xyz\,, \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$$

indicandone il tipo.

11. Calcolare massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x^5 + xy^2 - 4y^2 - 15x^3\,.$$

Determinare poi $f(\mathbb{R}^2)$.

12. Determinare il punto del piano $x + 2y + z = 4$ che ha distanza minima da $(1,0,-2)$.

13. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti di

$$f(x,y) = e^{1/g(x,y)}\,,$$

ove $g(x,y) = x^2 + 2 + \cos^2 y - 2\cos y$.

14. Studiare i punti di estremo delle seguenti funzioni e determinarne la natura:

(1) $f(x,y) = \sin(xy)$
(2) $f(x,y) = |x|e^{-\left(x^2+y^2\right)}$; dimostrare anche che f ammette minimo e massimo assoluti.
(3) $f(x,y) = (y - x^2)\,(y - 2x^2)$
(4) $f(x,y) = y^3 + 1 + (x+y)^2$; .

15. Studiare i punti di estremo delle seguenti funzioni e determinarne la natura al variare del parametro $a \in R$:

(1) $f_a(x,y) = ax^2 + e^{\left(x^2+y\right)} - y$,
(2) $f_a(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + e^{-\left(x^2+y^2\right)} - \arctan(y^2)$,
(3) $f_a(x,y) = x^3 - 8axy + 4ay^2$.