Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11 (Canale 1)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica

Appunti sugli insiemi semplicemente connessi

Ricordiamo che il sostegno di una curva piana, semplice e chiusa divide il piano in due aperti connessi, di cui uno è limitato e si dice **interno** della curva, l'altro è illimitato e viene detto **esterno** della curva.

Introduciamo innanzitutto la definizione degli insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$, dove, a livello intuitivo, essi coincidono con gli insiemi "privi di buchi".

Def. 1. Un insieme aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *semplicemente connesso* se, data una qualsiasi curva γ semplice e chiusa con sostegno contenuto in E, allora anche l'interno di γ è contenuto in E.

Nel piano sono insiemi semplicemente connessi i seguenti insiemi:

- tutti gli aperti convessi;
- tutti gli aperti limitati con frontiera costituita da un'unica curva;
- il piano privato di una semiretta.

Non sono invece semplicemente connessi gli insiemi:

- tutti gli aperti privati di un punto (in particolare, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
- le corone circolari;
- il piano privato di una retta (perché non è connesso).

Introduciamo ora la definizione degli insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che in $\mathbb{R}^3$ non ha senso parlare di interno di una curva chiusa, per cui bisogna dare una definizione diversa rispetto al caso planare. Ci accontentiamo, in questo caso, di una definizione intuitiva, ma sufficiente ai nostri scopi.

Def. 2. Un insieme aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *semplicemente connesso* se, data una qualsiasi curva γ chiusa, regolare a tratti, con sostegno contenuto in E, essa può essere contratta, attraverso una deformazione continua, a un unico punto, senza mai uscire da E.

In $\mathbb{R}^3$ sono insiemi semplicemente connessi i seguenti insiemi:

- tutti gli aperti convessi;
- lo spazio privato di un punto (in particolare, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}$);
- gli insiemi della forma $E = \{(x,y,z) \,:\, r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$, cioè le corone sferiche.

Non sono invece semplicemente connessi in $\mathbb{R}^3$ gli insiemi:

- $\mathbb{R}^3$ privato di una retta (in particolare, $\mathbb{R}^3$ privato di uno dei tre assi coordinati);
- $\mathbb{R}^3$ privato di un piano (perché non è connesso).

Abbiamo dimostrato che una forma differenziale continua esatta in un insieme E aperto e connesso è chiusa. Negli insiemi semplicemente connessi vale anche il viceversa, cioè

$$\boxed{\text{in } E \text{ semplicemente connesso una forma differenziale chiusa è esatta.}}$$

Nel linguaggio dei campi questo risultato si può formulare come segue.

Proposizione 1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto semplicemente connesso, e sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ in E tale che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

in ogni punto di E. Allora F è conservativo.

Proposizione 2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto semplicemente connesso, e sia F un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ e irrotazionale. Allora F è conservativo.