Temi sessioni estiva e autunnale 2009

Corso di Analisi 1

Andrea Centomo

Anno accademico 2009/2010

1 Tema 1 del 15 luglio 2009

1.1 Studio di funzione

Si consideri la funzione

$$f(x) = |\arctan x|^{\arctan x}.$$

a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

b) Determinare eventuali estendibilità per continuità; nel caso proseguire nello studio della funzione estesa.

c) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

d) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia, i punti estremi e gli eventuali punti di massimo e di minimo, relativo e assoluto, di f. Calcolare i limiti di f, individuando gli eventuali punti angolosi e cuspidi.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Soluzione. La funzione si può riscrivere come

$$f(x) = e^{\arctan(x) \cdot \log|\arctan(x)|}$$

ed è continua nel suo dominio $D = \mathbb{R} - \{0\}$. La funzione non ha simmetrie, non è periodica ed è strettamente positiva. Per verificare se è estendibile per continuità in $x = 0$ calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\arctan(x) \cdot \log|\arctan(x)|} = 1$$

da cui possiamo concludere che la funzione è estendibile per continuità ponendo $f(0) = 1$.

La funzione non ha asintoti verticali. Per verificare la presenza di asintoti orizzontali calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\arctan(x) \cdot \log(\arctan(x))} = e^{\frac{\pi}{2}(\log\pi - \log 2)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\arctan(x) \cdot \log(-\arctan(x))} = e^{\frac{\pi}{2}(\log 2 - \log\pi)}$$

da cui concludiamo che le rette di equazione

$$y = e^{\frac{\pi}{2}(\log\pi - \log 2)} \qquad y = e^{\frac{\pi}{2}(\log 2 - \log\pi)}$$

sono asintoti orizzontali rispettivamente destro e sinistro per f.

La funzione è derivabile in D e si ha

$$f'(x) = e^{\arctan(x) \cdot \log|\arctan(x)|} \left(\frac{\log|\arctan(x)|}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{|\arctan(x)|} \cdot \frac{\arctan(x)}{|\arctan(x)|} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$$

da cui, semplificando

$$f'(x) = e^{\arctan(x) \cdot \log|\arctan(x)|} \left(\frac{\log|\arctan(x)| + 1}{1+x^2} \right)$$

La funzione non è derivabile in $x=0$ in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\arctan(x)\cdot\log|\arctan(x)|}\left(\frac{\log|\arctan(x)|+1}{1+x^2}\right) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\arctan(x)\cdot\log|\arctan(x)|}\left(\frac{\log|\arctan(x)|+1}{1+x^2}\right) = -\infty.$$

Quindi l'asse delle ordinate è tangente verticale al grafico di f. Lo studio del segno della derivata I è riconducibile alla determinazione delle soluzioni della disequazione

$$\log|\arctan(x)| + 1 \geq 0$$

da cui

$$|\arctan(x)| \geq e^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geq \tan e^{-1} \quad \vee \quad x \leq -\tan e^{-1}.$$

Possiamo concludere che $f(x)$ è

1. strettamente crescente se ristretta agli intervalli $(-\infty, -\tan e^{-1})$ e $(\tan e^{-1}, +\infty)$
2. strettamente decrescente se ristretta agli intervalli $(-\tan e^{-1}, 0)$ e $(0, \tan e^{-1})$.

Il prolungamento di $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\tan e^{-1}, \tan e^{-1})$.

La funzione ammette due punti di estremo relativo

$$x_M = -\tan e^{-1} \qquad\qquad x_m = \tan e^{-1}$$

che sono rispettivamente di massimo e un minimo. In corrispondenza di tali punti la funzione assume i valori

$$f(x_M) = e^{e^{-1}} \qquad f(x_m) = e^{-e^{-1}}.$$

I punti di estremo relativo **non** sono assoluti in quanto per ogni $x \in D$ vale la limitazione

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\pi/2} < f(x) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2}.$$

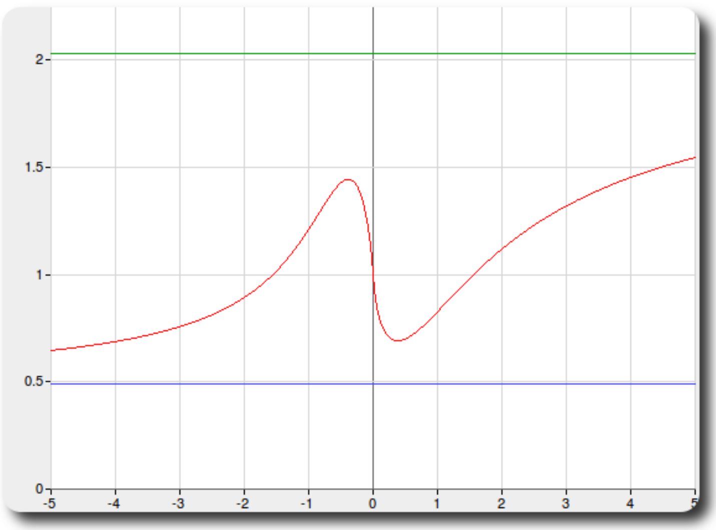

Figura 1. Grafico di f

2 Tema 1 del 15 settembre 2009

2.1 Studio di funzione

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1+\cos x}}}{1+\cos x}$$

a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto, di f. Calcolare i limiti di f' se significativi.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Soluzione. Osservato che

$$1+\cos x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

la funzione è definita in

$$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

In D la funzione è continua (composizioni di funzioni continue) e definita positiva. Posto

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1+x}}}{1+x}$$

non è difficile vedere che

$$f(x) = g(\cos(x)) = g \circ \cos(x)$$

da cui, ricordato che il coseno è periodico di periodo 2π, si conclude che anche f è periodica di periodo 2π. Possiamo allora restringere lo studio di f all'intervallo $I = (-\pi, \pi)$. La funzione è pari in quanto $f(x) = f(-x)$. Si ha

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to \pi^-} f(x).$$

La funzione non ha asintoti. La funzione è prolungabile per continuità su tutto $\mathbb{R}$. La derivata prima di f in I è

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{1+\cos x}} \frac{-\sin x}{(1+\cos(x))^3} + e^{-\frac{1}{1+\cos x}} \frac{\sin x}{(1+\cos(x))^2}$$

che possiamo riscrivere come

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{1+\cos x}} \frac{\sin x \cos x}{(1+\cos(x))^3}.$$

Risulta di interesse calcolare

$$\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \to \pi^+} f'(x).$$

Lo studio del segno della derivata I si riconduce alla disequazione

$$\sin x \cos x \geq 0$$

che in I ha soluzioni

$$-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Possiamo concludere che $f(x)$ è

1. strettamente crescente se ristretta agli intervalli $(-\pi, -\pi/2)$ e $(0, \pi/2)$
2. strettamente decrescente se ristretta agli intervalli $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, \pi)$.

Si hanno due punti di massimo relativo e assoluto

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \frac{\pi}{2}$$

nei quali la funzione assume il valore

$$f(x_1) = f(x_2) = e^{-1}.$$

La funzione ha un punto di minimo relativo

$$x_m = 0$$

e $f(0) = e^{-1/2}/2$.

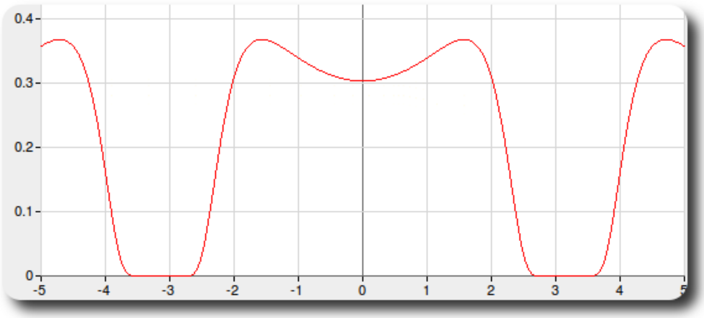

Figura 2. Grafico di f

2.2 Limite

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - x + \cos(x-2) + (x-2)^4 \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\log(x-1) - (x-2)}$$

Soluzione. Con la sostituzione $z = x - 2$ il limite diventa

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{e^z - 2 - z + \cos z + z^4 \sin(1/z^2)}{\log(1+z) - z}$$

Sappiamo che nel limite per $z \to 0^+$ si ha

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3)$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + o(z^3)$$

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + o(z^2)$$

da cui sostituendo

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) - \frac{z^2}{2} + o(z^3) + z^4 \sin(1/z^2)}{-\frac{1}{2} z^2 + o(z^2)}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{z^4 \sin(1/z^2)}{z^3} = 0$$

e ciò permette di riscrivere il limite precedente come

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{\frac{z^3}{6} + o(z^3)}{-\frac{1}{2} z^2 + o(z^2)} = \lim_{z \to 0^+} z \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = 0.$$