ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 8 luglio 2014

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|2x-2|}{x^2+1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f.

Facoltativo: Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento: (cenno) a) Il dominio si ricava ponendo $|2x-2| \le x^2+1$, e si ha:

$$D = \{x \in \mathbb{R}, x \le -1-\sqrt{2},\ x \ge -1+\sqrt{2}\}.$$

Non ci sono simmetrie. Poiché l'argomento della funzione arcsin è sempre maggiore o uguale a zero, anche $f \ge 0$ sempre. Inoltre $0 \le f(x) \le \pi/2$, e $f(1) = 0$, mentre $f(-1 \pm \sqrt{2}) = \pi/2$, quindi $x = 1$ è punto di minimo assoluto e $x = -1 \pm \sqrt{2}$ sono punti di massimo assoluto per f.

b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

c) La funzione è continua nel suo dominio.

Se $x \le -1-\sqrt{2}$ oppure $-1+\sqrt{2} \le x \le 1$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{-2x+2}{x^2+1}\right)$, quindi

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x-2}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-(-2x+2)^2}} \quad \text{per } x < -1-\sqrt{2} \text{ o } -1+\sqrt{2} < x < 1\ .$$

Si ha $f'(x) > 0$ per $x < -1-\sqrt{2}$, quindi in questo intervallo la funzione è crescente, e $f'(x) < 0$ per $-1+\sqrt{2} < x < 1$, dove quindi è decrescente.

Inoltre $\lim_{x\to-1-\sqrt{2}} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1+\sqrt{2}} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f'(x) = -1$.

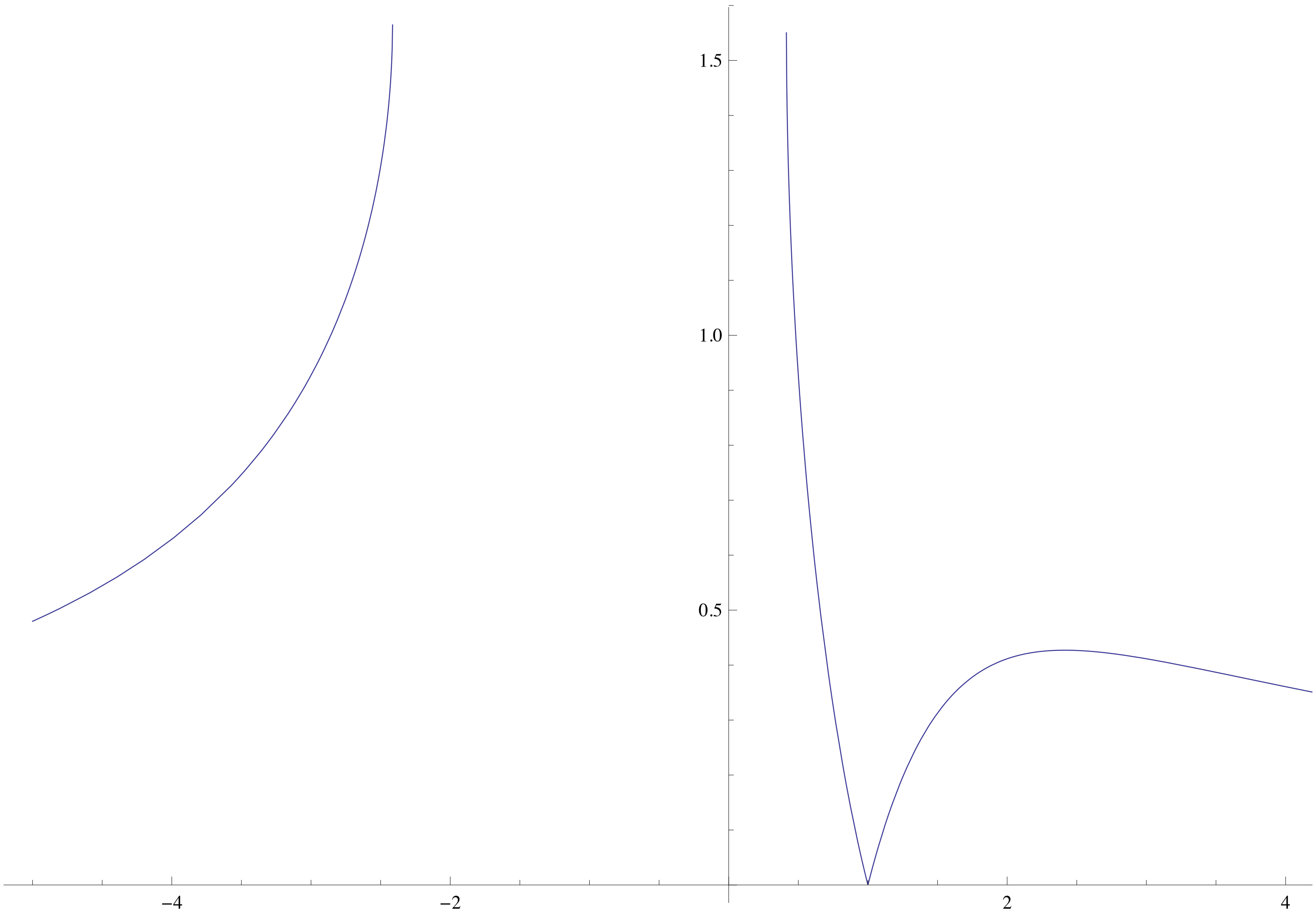
Se $x \ge 1$ si ha $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-2}{x^2+1}\right)$, che da per $x > 1$

$$f'(x) = -\frac{2x^2-4x-2}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-(-2x+2)^2}}.$$

Si ha che $1 < x < 1+\sqrt{2}$, $f'(x) > 0$, se $x > 1+\sqrt{2}$, $f'(x) < 0$. Inoltre $\lim_{x\to1^+} f'(x) = 1$.

Quindi $x = 1$ è un punto angoloso, e $x = 1+\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale per f.

Out[6]=



Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx.$$

(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right) \frac{1}{x^2+4x+9} dx$$

converge.

Svolgimento: (cenno)
(a) Si noti che $x^2+4x+9 = 5+(x+2)^2$, da cui si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx = \frac{1}{5}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2} dx = \frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty} \sqrt{5}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{3}{\sqrt{5}})\right).$$

(b) Si deve solo discutere l'integrabilità in $+\infty$. Si ha che:
- se $2-\alpha>0$ allora $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right) = 0$,
-se $\alpha = 2$ allora $\arctan 1 = \pi/4$,
-se $\alpha > 2$ allora $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right) = \pi/2$.

Nel primo caso ($\alpha < 2$) la funzione integranda $f(x)$ è $f(x) \sim \frac{1}{x^{4-\alpha}}$ quindi è integrabile se $4-\alpha > 1$ che, in questo caso è sempre vero. Nel secondo caso ($\alpha = 2$) $f(x) \sim \frac{\pi}{4x^2}$ quindi è integrabile. Nel terzo caso ($\alpha > 2$) $f(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$ quindi è integrabile.

OPPURE: Nel primo caso la funzione integranda della parte (b) è o-piccolo di quella della parte (a), quindi integrabile, nel secondo e nel terzo caso la funzione integranda della parte (b) è asintotica a quella della parte (a), quindi di nuovo integrabile.

OPPURE: $0 \le f(x) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+4x+9} \sim \frac{\pi}{2x^2}$ per cui f è integrabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per il Teorema del confronto.

Esercizio 3 (7 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\alpha n + (n^2-4)\log\left(\frac{n}{n+2}\right)\right].$$

Svolgimento: (cenno)
Si ha: $\log\left(\frac{n}{n+2}\right) = \log\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)$. Quando $n\to+\infty$, si ha $\frac{-2}{n+2}\to 0$, quindi possiamo usare lo sviluppo del logaritmo e scrivere:

$$\log\left(1+\frac{-2}{n+2}\right) = \frac{-2}{n+2} - \frac{1}{2}\frac{4}{(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{(n+2)^2}\right).$$

Sostituendo lo sviluppo nel limite si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\alpha n+(n+2)(n-2)\left(\frac{-2}{n+2}-\frac{1}{2}\frac{4}{(n+2)^2}+o(\frac{1}{(n+2)^2})\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\alpha n-2(n-2)-2\frac{(n-2)}{(n+2)}+o(\frac{n-2}{(n+2)^2})\right]=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(\alpha-2)n+4-2\frac{(n-2)}{(n+2)}+o(\frac{n-2}{(n+2)^2})\right]=\begin{cases}+\infty & \alpha>2\\ 2 & \alpha=2\\ -\infty & \alpha<2\end{cases}$$

(OPPURE: $\log\left(\frac{n}{n+2}\right)=-\log\left(\frac{n+2}{n}\right)=\log\left(1+\frac{2}{n}\right)=-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)...$)

Esercizio 4 (7 punti) Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{xy-4}{x^2+4y^2}}$$

(a) Determinare il dominio di f e disegnarlo. Dire se è chiuso e limitato.

(b) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico di f in $(4,2,f(4,2))$, giustificando la risposta.

Facoltativo: Determinare, se ha senso ed esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Svolgimento: (cenno)

(a) Il dominio è dato dalla condizione $xy>4$, cioè il dominio sopra l'iperbole del primo quadrante e sotto quella del terzo. È un insieme aperto e illimitato.

(b) La funzione è differenziabile nel suo dominio, quindi il piano tangente è definito dall'equazione

$$z=f(4,2))+\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(4,2)}(x-4)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(4,2)}(y-2).$$

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{xy-4}{x^2+4y^2}\right)^{-1/2}\frac{y(x^2+4y^2)-2x(xy-4)}{(x^2+4y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{xy-4}{x^2+4y^2}\right)^{-1/2}\frac{x(x^2+4y^2)-8y(xy-4)}{(x^2+4y^2)^2}.$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(4,2)}=\frac{\sqrt{8}}{64},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(4,2)}=\frac{\sqrt{8}}{32}.$$

Da cui il piano tangente risulta:

$$z=\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{8}}{64}(x-4)+\frac{\sqrt{8}}{32}(y-2).$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 8 luglio 2014

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|2+2x|}{1+x^2}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f.

Facoltativo: Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+14}dx.$$

(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^{3-\alpha}}\right)\frac{1}{x^2+6x+14}dx$$

converge.

Esercizio 3 (7 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\alpha n - (n^2-9)\log\left(\frac{n}{n-3}\right)\right].$$

Esercizio 4 (7 punti) Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \log\left[\frac{xy-4}{4x^2+y^2}\right]$$

(a) Determinare il dominio di f e disegnarlo. Dire se è chiuso e limitato.

(b) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico di f in $(2,4,f(2,4))$, giustificando la risposta.

Facoltativo: Determinare, se ha senso ed esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.