Esercizi di autovalutazione di Matematica A, 15 novembre 2006.

1. i) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(|z| - i)(z^2 - 2z + 6i - 7)(\bar{z} + 1) = 0.$$

ii) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione della seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{(|z| - i)(z^2 - 2z + 6i - 7)(\bar{z} + 1)}.$$

2. Considerando

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x^4 - x)}{x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione sia continua e derivabile nel proprio dominio.

3. Data la funzione $f(x) = \log x + \operatorname{arctg} x$, determinarne il dominio e l'immagine; si assuma f definita su tali insiemi. i) Provare che la funzione f è invertibile. ii) Denotata con f^{-1} la relativa funzione inversa, calcolare $Df^{-1}(\pi/4)$.

4. Trovare dominio, segno, asintoti, intervalli di monotonia della funzione $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x} - 2x$.

5. Calcolare il limite seguente, al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^2} - ax^2 - 1 + x^2 \log(\cos x)}{2x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 - x \sin x}.$$