Analisi Matematica 1, a.a. 2009-2010

Complementi sul confronto asintotico per le serie.

Teorema del confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni a valori positivi.

i) se $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$ (cioè, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$),

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.

ii) Se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ (cioè, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$),

se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

iii) Se $b_n = o(a_n)$ per $n \to +\infty$ (cioè, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$),

se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente.

Confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n^p}$

Sia a_n, una successione a termini positivi.

i) Se per qualche $p > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} n^p a_n = L \in [0, +\infty)$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

ii) Se per qualche $p \leq 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} n^p a_n = L \in (0, +\infty]$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente.

Scala di serie convergenti/divergenti

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ è convergente

1) per $\alpha = 1$ e $\beta > 1$,

oppure

2) per $\alpha > 1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.