Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
P. Mannucci

Vicenza 15/04/08.

Esercizi di autoverifica. 1. Curve regolari e forme differenziali lineari.

Senza soluzione

1. Scrivere in forma parametrica ed in forma implicita l'equazione della retta tangente a γ : $\left\{\rho(\theta) = (e^\theta + 1)\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ nel punto $P_0 = (2, 0)$.

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la retta tangente alla curva $\gamma : \{x = \arctan[(y+1)^\alpha],$ $y \in [-1, 1]\}$ nel punto $P_0 = (\pi/4, 0)$ è parallela alla retta $y = x$.

3. Determinare il versore tangente alla curva

$$\gamma : \quad \begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(3t) \\ z = \log(2\sin(3t)) \qquad t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

in $(0, 1, \log 2)$.

4. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = \frac{x^2+y}{\sqrt{2+4z^2}}$, calcolare $\int_\gamma f$ dove γ è l'arco di curva, giacente nel semispazio $\{y \le 0\}$, definito da

$$\gamma : \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 4 \\ z = t \qquad t \in [-2, 2]\,. \end{cases}$$

5. Stabilire in quali regioni del piano la forma differenziale

$$\frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2}\,dx + \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}\,dy$$

è esatta. Calcolare poi il suo integrale lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = (t, \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos t} + \frac{3}{2} + t) \qquad t \in [0, 1].$$

6. Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y(\log y - 1)}{x^2+1}\,dx + \arctan x \log y\,dy,$$

definita in $\Omega = \{(x, y) \in \Re^2 \,|\, y > 0\}$.
i. Si dica se è chiusa.
ii. Si dica se è esatta e se ne trovino tutte le eventuali primitive.
iii. Fra tutte le primitive si trovi quella che vale π nel punto $(-1, 1)$.
iv. Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazione $y = -x^3 + 3$, $x \in [-1, 1]$.

7.
Dire se le seguenti forme differenziali lineari in tre variabili sono differenziali esatti e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva:
i)

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dx+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,dy+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz;$$

ii)

$$-\frac{y+z}{(x-y-z)^2}\,dx+\frac{x}{(x-y-z)^2}\,dy+\frac{x}{(x-y-z)^2}dz.$$

Con soluzione

1. Trovare l'ascissa del baricentro della curva piana in coordinate polari: $\rho=e^{k\theta}$, $0<\theta<\pi$ $(k>0)$.

2. Calcolare la lunghezza della curva seguente:

$$\begin{cases} x=1-\cos t+(2-t)\sin t \\ y=\sin t+(2-t)\cos t \\ z=t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2.$$

3. Data la curva $\varphi(t)=(R\sin t, R\cos t, ht)$ con $0<t<2$, determinare l' integrale curvilineo di $f(x,y,z)=xyz$ lungo φ.

4. Sia $\varphi:[0,2]\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(t)=(x(t),y(t),z(t))$ una curva regolare. Allora necessariamente si ha che:
(a) la curva $\psi(t)=(x(t^2),y(t^2),z(t^2))$ con $t\in[0,2]$, ha $L(\psi)=L(\varphi)$;
(b) la curva $\psi(t)=(x(1-t),y(1-t),z(1-t))$ con $t\in[0,1]$, ha $L(\psi)=\frac{1}{2}L(\varphi)$;
(c) la curva $\psi(t)=\left(x\left(\frac{2-t}{3}\right),y\left(\frac{2-t}{3}\right),z\left(\frac{2-t}{3}\right)\right)$ con $t\in[-4,2]$, ha $L(\psi)=L(\varphi)$.

5. Sia $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(t)=(x(t),y(t),z(t))$ una curva semplice e regolare. Allora necessariamente si ha che:
(a) se ψ é equivalente a φ, anche ψ é una curva semplice e regolare;
(b) se il sostegno di ψ coincide con il sostegno di φ, allora ψ é equivalente a φ;

6. Date una funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ e una curva in coordinate polari $\rho=\theta$ con $\theta\in[0,\pi]$, dire quale delle seguenti affermazioni é corretta.
(a) $\int_\rho f=\frac{\pi^2}{2}$;
(b) $\int_\rho f=\frac{1}{3}[(1+\pi^2)^{3/2}-1]$;
(c) $\int_\rho f=\frac{2}{3}\pi^{3/2}$.

7. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{x^2}{(x^2-y^2)^{1/2}}\,dx+\frac{xy}{x^2+y^2}\,dy,$$

dove γ é la curva data da $y=x^2$ con $1/2\le x\le 1/\sqrt{3}$ con l' orientamento delle x crescenti.

8. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y}\,dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy,$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

9. Dire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = [1 + \cos(x + y)]dx + \cos(x + y)dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita come segue: $x = \cos^{35} t$, $y = \sin^{35} t$, con $0 \leq t \leq \pi/2$.

10. Dire se la seguente forma differenziale é esatta se ristretta al primo quadrante e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = \frac{x + 2y}{x^3 y} dx + \frac{1}{xy^2} dy.$$

11. Dire se la seguente forma differenziale é esatta nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, calcolare una sua primitiva:

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita, in coordinate polari, come segue: $\rho = 2 - \cos\theta$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$.