

Vicenza 22/4/08.

Soluzioni esercizi di autoverifica. 1. Curve regolari e forme differenziali lineari.

1. Trovare l'ascissa del baricentro della curva piana in coordinate polari: $\rho = e^{k\theta}$, $0 < \theta < \pi$ ($k > 0$).

Sol. L'ascissa del baricentro é data dalla formula: $x_G = \frac{1}{L(\rho)} \int_{\rho} x$. Calcoliamo quindi

$$L(\rho) = \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2k\theta} + k^2 e^{2k\theta}} d\theta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (e^{k\pi} - 1).$$

Allora

$$x_G = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}(e^{k\pi} - 1)} \int_0^{\pi} e^{2k\theta} \cos \theta \sqrt{1+k^2} d\theta = \frac{k}{(e^{k\pi} - 1)} \int_0^{\pi} e^{2k\theta} \cos \theta d\theta.$$

Calcoliamo a parte, integrando per parti due volte...

$$\int_0^{\pi} e^{2k\theta} \cos \theta d\theta = -2k(1 + e^{2k\pi}) - 4k^2 \int_0^{\pi} e^{2k\theta} \cos \theta d\theta,$$

da cui si ottiene

$$(1 + 4k^2) \int_0^{\pi} e^{2k\theta} \cos \theta d\theta = -2k(1 + e^{2k\pi}),$$

che sostituito in x_G diventa

$$x_G = -\frac{2k^2(1 + e^{2k\pi})}{(1 + 4k^2)(e^{k\pi} - 1)}.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva seguente:

$$\begin{cases} x = 1 - \cos t + (2 - t) \sin t \\ y = \sin t + (2 - t) \cos t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Sol. Dalla definizione di lunghezza, detta φ la curva data, segue

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(2-t)^2 \cos^2 t + (2-t)^2 \sin^2 t + 1} dt = (\text{sost. } s = 2 - t) = \int_0^2 \sqrt{s^2 + 1} ds.$$

L'integrale $\int \sqrt{s^2 + 1} dt$ un integrale notevole (da ricordare!): si calcola usando la sostituzione $s = \sinh \theta$ (seno iperbolico) e si ottiene

$$\int \sqrt{s^2 + 1} ds = \frac{1}{2} \log(s + \sqrt{1 + s^2}) + \frac{s}{2} \sqrt{1 + s^2} + c.$$

Quindi

$$L(\varphi) = \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}.$$

3. Data la curva $\varphi(t) = (R \sin t, R \cos t, ht)$ con $0 < t < 2$, determinare l' integrale curvilineo di $f(x, y, z) = xyz$ lungo φ .

Sol. Dalla definizione di integrale curvilineo, si ha

$$\int_{\varphi} xyz = \int_0^2 hR^2 t \sin t \cos t \sqrt{R^2 + h^2} dt,$$

e usando le formule di duplicazione

$$\int_{\varphi} xyz = \frac{hR^2 \sqrt{R^2 + h^2}}{2} \int_0^2 t \sin(2t) dt = \frac{hR^2 \sqrt{R^2 + h^2}}{2} \left(-\cos 4 + \frac{1}{4} \sin 4 \right),$$

dove il risultato si ottiene integrando una volta per parti.

4. Sia $\varphi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva regolare. Allora necessariamente si ha che:

- (a) la curva $\psi(t) = (x(t^2), y(t^2), z(t^2))$ con $t \in [0, 2]$, ha $L(\psi) = L(\varphi)$;
- (b) la curva $\psi(t) = (x(1-t), y(1-t), z(1-t))$ con $t \in [0, 1]$, ha $L(\psi) = \frac{1}{2}L(\varphi)$;
- (c) la curva $\psi(t) = (x(\frac{2-t}{3}), y(\frac{2-t}{3}), z(\frac{2-t}{3}))$ con $t \in [-4, 2]$, ha $L(\psi) = L(\varphi)$.

Sol. (c).

5. Sia $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva semplice e regolare. Allora necessariamente si ha che:

- (a) se ψ é equivalente a φ , anche ψ é una curva semplice e regolare;
- (b) se il sostegno di ψ coincide con il sostegno di φ , allora ψ é equivalente a φ .

Sol. (a).

6. Date una funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e una curva in coordinate polari $\rho = \theta$ con $\theta \in [0, \pi]$, dire quale delle seguenti affermazioni é corretta.

- (a) $\int_{\rho} f = \frac{\pi^2}{2}$;
- (b) $\int_{\rho} f = \frac{1}{3}[(1 + \pi^2)^{3/2} - 1]$;
- (c) $\int_{\rho} f = \frac{2}{3}\pi^{3/2}$.

Sol. (b) (Calcolare $\int_{\rho} f$).

7. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{1/2}} dx + \frac{xy}{x^2 + y^2} dy,$$

dove γ é la curva data da $y = x^2$ con $1/2 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ con l' orientamento delle x crescenti.

Sol. Dalla definizione di integrale di una forma differenziale, si ha

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{1/2}} dx + \frac{xy}{x^2 + y^2} dy = \int_{1/2}^{1/\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{(x^2 - x^4)^{1/2}} 1 + \frac{x^3}{x^2 + x^4} 2x \right] dx.$$

Dividendo i due integrali:

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} dx = (\text{sost. } s = 1-x^2) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{s^{1/2}} ds = -s^{1/2} + c = -(1-x^2)^{1/2} + c,$$

$$\int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = 2 \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = 2x - 2 \arctan x + c.$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{(x^2-y^2)^{1/2}} dx + \frac{xy}{x^2+y^2} dy = [-(1-x^2)^{1/2} + 2x - 2 \arctan x]_{1/2}^{1/\sqrt{3}}.$$

8. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{y} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy,$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

Sol. Dalla definizione di integrale di una forma differenziale, segue che

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{y} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\cos^2 t}{\sin t} (-\sin t) + \sin t \cos t \right] dt.$$

Dividendo i due integrali,

$$-\int \cos^2 t dt = (\text{int.notevole}) = -\frac{t + \sin t \cos t}{2} + c,$$

$$\int \sin t \cos t dt = (\text{sost. } s = \sin t) = \int s ds = \frac{\sin^2 t}{2} + c.$$

Quindi,

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{y} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy = \left[-\frac{t + \sin t \cos t}{2} + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2}.$$

9. Dire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = [1 + \cos(x+y)]dx + \cos(x+y)dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita come segue: $x = \cos^{35} t$, $y = \sin^{35} t$, con $0 \leq t \leq \pi/2$.

Sol. Il dominio delle due componenti della forma é il piano, convesso. Inoltre la forma é chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}[1 + \cos(x+y)] = -\sin(x+y) = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x+y).$$

Quindi é esatta. Per trovare un potenziale $U(x, y)$, usiamo la stessa definizione di primitiva: deve valere

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, y) = 1 + \cos(x+y), \quad \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = \cos(x+y).$$

Integriamo la prima espressione in x :

$$U(x, y) = x + \sin(x+y) + g(y),$$

deriviamola in y e poniamola uguale alla $\frac{\partial}{\partial y}U(x, y)$ di sopra per determinare $g(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x, y) = \cos(x + y) + g'(y) = \cos(x + y),$$

da cui segue che $g'(y) = 0$, cioè $g(y) = c$. Quindi, il potenziale é

$$U(x, y) = x + \sin(x + y) + c.$$

Detta φ la curva data, per un teorema sulle forme differenziali esatte, vale

$$\int_{\varphi} \omega = U(x(\pi/2), y(\pi/2)) - U(x(0), y(0)) = U(0, 1) - U(1, 0) = \sin 1 - 1 - \sin 1 = -1.$$

10. Dire se la seguente forma differenziale é esatta se ristretta al primo quadrante e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = \frac{x + 2y}{x^3y}dx + \frac{1}{xy^2}dy.$$

Sol. Il primo quadrante (aperto, cioè con $x > 0$ e $y > 0$) é convesso. Inoltre la forma é chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x + 2y}{x^3y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{xy^2}.$$

Quindi é esatta. Per trovare un potenziale $U(x, y)$, procediamo come nell' es. 9:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = \frac{x + 2y}{x^3y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) = \frac{1}{xy^2}.$$

Integriamo la seconda espressione in y :

$$U(x, y) = -\frac{1}{xy} + g(x),$$

deriviamola in x e poniamola uguale alla $\frac{\partial}{\partial x}U(x, y)$ di sopra per determinare $g(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = \frac{1}{x^2y} + g'(x) = \frac{x + 2y}{x^3y} = \frac{1}{x^2y} + \frac{2}{x^3},$$

da cui segue che $g'(x) = 2x^{-3}$, cioè $g(x) = -\frac{1}{x^2} + c$. Quindi, il potenziale é

$$U(x, y) = -\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2} + c.$$

11. Dire se la seguente forma differenziale é esatta nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, calcolare una sua primitiva:

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita, in coordinate polari, come segue: $\rho = 2 - \cos \theta$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Sol. L' insieme di definizione di ω é il piano meno l' origine, quindi non é semplicemente connesso. Però, la forma é chiusa e procedendo come sopra é facile calcolarne una primitiva:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c,$$

definita in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Poiché la curva lungo cui si vuole calcolare l' integrale non passa per $(0, 0)$ ed é chiusa, per un teorema sulle forme differenziali esatte, vale $\int_\rho \omega = 0$.

Attenzione: la condizione che A sia semplicemente connesso non é necessaria perché una forma chiusa sia esatta, ma solo sufficiente! (Non appena si riesce a trovare una primitiva definita su A , per definizione la forma é esatta in A !)