# ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2005-2006

**Esercizi sulle distribuzioni**

1) Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x < 0 \\ \alpha x & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & \text{per} \quad x > 1. \end{cases}$$

Si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di $f$ nel senso delle distribuzioni.

2) (Mariconda) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

i) Calcolare $f'$ e $f''$ nel senso delle distribuzioni;
ii) calcolare la trasformata di Fourier di $f''$;
iii) dedurne $\hat{f}$ e provare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
iv) dedurne il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \cos u - \sin u}{u^3} \cos \frac{u}{2} \, du.$$

Svolgimento: $f'(x) = -2x\chi_{[-1,1]}(x)$, $f''(x) = -2\chi_{[-1,1]}(x) + 2\delta(x-1) + 2\delta(x+1)$. Perciò $-\omega^2 \hat{f}(\omega) = \hat{f''}(\omega) = 4\cos\omega - 4\frac{\sin\omega}{\omega}$. Siccome $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ è una funzione continua. Dalla formula precedente risulta perciò

$$\hat{f}(\omega) = 4\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}.$$

Si osservi che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e quindi vale la formula di inversione per $f$. Per $x = 1/2$ essa dà, in particolare,

$$f(1/2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 4e^{i\omega/2} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3} \, d\omega,$$

da cui, per parità, $I = -3\pi/8$.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad |x| \leq 1 \\ 2 - x & \text{per} \quad 1 < x \leq 2 \\ -2 - x & \text{per} \quad -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{per} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

i) Calcolare $f'$ e $f''$ nel senso delle distribuzioni;
ii) calcolare la trasformata di Fourier di $f''$;
iii) dedurne $\hat{f}$ e provare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
iv) dedurne il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin u - \sin(2u)}{u^2} \sin u \, du.$$

(risultato: $\hat{f}(\omega) = 2i(-2\sin\omega + \sin(2\omega))/\omega^2$; $I = \pi$)

4) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{per} \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{per} \quad |x| > \pi/2 \end{cases}$$

i) Calcolare $f'$ e $f''$ nel senso delle distribuzioni;
ii) calcolare la trasformata di Fourier di $f''$ (esprimendola in funzione di $\hat{f}$);
iii) dedurne $\hat{f}$ e provare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
iv) dedurne il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2} \cos\frac{\pi\omega}{4}\, d\omega.$$

(risultato: $\hat{f}(\omega) = 2\cos(\pi\omega/2)/(1-\omega^2)$, $I = \pi/\sqrt{2}$)

5) i) Dire se la funzione $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ o in $L^2(\mathbb{R})$.
ii) Calcolare la derivata prima $f'$ (nel senso delle distribuzioni) di $f(x)$.
iii) Dimostare che $f'$ è una distribuzione temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.
iv) Dedurre da iii) quanto vale la trasformata di Fourier di $f$.
(Risultato: $\hat{f}(\omega) = \pi i(e^{-|\omega|} - 1)/\omega$; si osservi che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, come doveva essere, e che $\hat{f}$ non è continua.)

6) Dimostrare che la successione $\frac{2}{\pi}\arctan kx$ converge a $\operatorname{sign} x$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
7) Servendosi della trasformata di Fourier, trovare le soluzioni dell'equazione

$$y'' - y = \delta$$

che sono distribuzioni temperate. (Risultato: $y(t) = -e^{-|t|}/2$)

8) (16.12.2004) i) Si calcolino la trasformata di Fourier e la derivata della distribuzione $\delta(x-2)$.
ii) Si provi che $T(x) = (x^2+1)\delta(x-2)$ è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.
iii) Si calcoli la trasformata di Fourier di $T$.

9) (16.12.2004, facoltativo) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^n \chi_{[\sqrt{n}-2,\sqrt{n}]}(t), \qquad n \in I\!N.$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ di $\{f_n(t)\}$. Si studi inoltre la convergenza di $\{f_n(t)\}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

10) (11.1.2005) Sia $f(x) = (|x|-2)\chi_{[-2,2]}(x)$.

i) Si calcolino la derivata prima $f'$ e la derivata seconda $f''$ nel senso delle distribuzioni di $f$;

ii) si calcoli la trasformata di Fourier di $f''$] e se ne deduca la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di $f$;

iii) usando la formula di inversione per $\hat{f}$ si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2u)-1}{u^2} \cos u\, du.$$

iv) (Facoltativo) Detta $f_n(x) = (|x| - 2)\chi_{[-2-1/n,2+1/n]}(x)$, si dica se

a) $f_n$ converge a $f$ uniformemente in $\mathbb{R}$;

b) $\hat{f}_n$ converge a $\hat{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}$ (non calcolare $\hat{f}_n$).

11) (11.1.2005, facoltativo) Si calcoli la distribuzione

$$T_n(x) = x^n \delta^{(n-1)}(x)$$

al variare di $n = 1, 2, \ldots$ ($\delta^{(k)}$ indica la derivata $k$-esima della $\delta$ di Dirac).

12)(20.9.2005) Sia $\{f_n\}$, $n \in I\!N, n > 0$ la successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } 1/n \le |x| \le n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire se la successione $f_n$ converge a $f$

1) puntualmente, uniformemente in $\mathbb{R}$;

2) in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$;

3) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

13) (7.9.2005) Si consideri la funzione $f(x) = x|x|$ se $|x| \le 1$, $f(x) = 0$ se $|x| > 1$.

i) Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

ii) Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di $f$.

iii) Si provi che $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; ci sono teoremi dai quali queste proprietà potevano essere dedotte senza calcolare $\hat{f}$?

iv) Si calcoli la derivata prima $f'$ di $f$ nel senso delle distribuzioni e si dimostri che $f'$ è temperata.

v) Usando l'espressione trovata per $\hat{f}$, si calcoli la trasformata di Fourier di $f'$.