

MATEMATICA A, Esercizi di autovalutazione, 7
(giustificare le risposte)

Vicenza, novembre 2006.

Esercizi sulle equazioni differenziali

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\alpha y''(t) + 2y'(t) + \frac{\alpha}{2}y(t) = 0.$$

i) Determinare l'integrale generale per ogni valore del parametro $\alpha \geq 0$. Dire per quali valori dei parametri le soluzioni sono tutte: i) periodiche; ii) limitate in $[0, +\infty[$. iii) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \geq 0$ per cui esiste almeno una soluzione dell'equazione differenziale tale che $e^{\frac{t}{\sqrt{3}}}y(t)$ risulta illimitata in $[0, +\infty[$.

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{y(t)}{\sin(2t)} = \sin t + \cos t.$$

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 2ty(t) = te^{-t^2}.$$

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = t + \sin t.$$

5. Determinare i valori del parametro reale α per i quali l'equazione differenziale

$$y'''(t) - \alpha y'(t) = \sin t$$

ammette almeno una soluzione y tale che $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

6. Per quali valori del parametro $\lambda > 0$ la soluzione $y(t)$ di

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

verifica la condizione $y(\pi) = 0$? Fra queste soluzioni ne esiste una strettamente positiva in $]0, \pi[$?

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

i) Trovare una soluzione nel caso $\alpha = \beta = 0$. ii) Dire se esistono α, β reali tali da rendere la soluzione periodica.

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{\frac{1+y(t)}{1+t^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

9. Determinare i valori del parametro reale α per i quali l'equazione differenziale

$$2y''(t) + y'(t) + \frac{\alpha}{2}y(t) = te^{-t}$$

ammette almeno una soluzione $y(t)$ tale che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

Raccolta di esercizi da appelli

1 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) - \alpha y(x) = \cos x - e^{x/2} \sin x.$$

(a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (Non si richiede di calcolare esplicitamente le costanti delle soluzioni particolari).

(b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste una soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale tale che la funzione $e^{-x/2}y(x)$ sia illimitata in $[0, +\infty[$.

2 Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - y''(x) + 4y'(x) - 4y = \cos(\alpha x) \quad (\alpha > 0).$$

(a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\forall \alpha > 0$.

(b) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui l'equazione ha almeno una soluzione $y(x)$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$.

(c) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui l'equazione ha almeno una soluzione $y(x)$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ non esista e $y(x)$ sia illimitata in $[0, +\infty[$.

3 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y''(x) = x.$$

4 (a) Risolvere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2ay'(x) + 4y(x) = e^{2x}.$$

(b) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$$

per ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione data.

5 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\alpha y'' - 3y = xe^x.$$

- (a) Determinare la soluzione per ogni valore di α .
- (b) Dire per quali valori del parametro α esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{xe^x} \in \mathbb{R}.$$