Esercizi su Teorema del Dini. Anno Accademico 2010-2011.

1. Si consideri $f(x,y) = -xe^y + 2y - 1$.

   i) Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ con $x_0 \leq 0$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. L'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in modo implicito una funzione $y = g(x)$ in un intorno di P_0?.

   ii) Trovare i $Q = (x_1, y_1)$ tali che $f(x_1, y_1) = 0$ ma f non soddisfa le ipotesi del Teorema del Dini per l'esplicitabilità di y in funzione di x.

2. Data $f(x,y) = xy^2 + \log(x^2+1) + 2\cos(xy)$, trovare l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(0,1,2)$.

3. Si consideri l'equazione $x^2 \log(y-1) + y^2 \log(x-1) = 0$.

   i) Si verifichi che in un intorno di $(x_0, y_0) = (2,2)$ essa definisce in modo implicito una funzione $y = y(x)$.

   ii) Scrivere l'equazione della retta tangente in $(x_0, y_0) = (2,2)$ alla curva definita implicitamente dall'equazione data.

4. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ si consideri l'equazione $F(x,y) = y^3 + y + \lambda g(x)$, dove $g \in C^2(\mathbb{R})$, con $g(0) = 0$, $g'(0) = g''(0) = 2$. Si dimostri che in un intorno di $x = 0$, l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$, C^2 e con $f(0) = 0$. Si calcoli il polinomio di Mac Laurin di f di ordine 2.

5. Dopo aver dimostrato che l'equazione $xy^2 + y + \sin(xy) + a\,(e^x - 1) = 0$ definisce per ogni $a \in \mathbb{R}$, una funzione $y = f(x) \in C^\infty$, con $f(0) = 0$, si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + ax}{x^2}.$$

6. Si verifichi che la funzione
$$f(x,y,z) = e^{\sin(2x) + y^2} + \int_0^{h(y)} \big(\cos(t) + e^t - 2\big)\, dt + \arctan(z-1) - 1,$$
   con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞ and $h(0) = 0$ definisce implicitamente in $P(0,0,1)$ una superficie di equazione $z = g(x,y)$. Trovare l'equazione del piano tangente in P alla superficie.

7. Si verifichi che la funzione
$$f(x,y,z) = e^y - e^x + xz - y + \sinh(z-1) - 1,$$
   definisce implicitamente in $P(0,0,1)$ una superficie di equazione $z = g(x,y)$. Trovare le derivate parziali di g in $(0,0)$.

8. Data la funzione
$$f(x,y,z) = \left(y - x^2\right)\left(y^2 - 1\right)^2,$$
disegnare $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$. Determinare i punti su D per cui valgono le ipotesi del Teorema del Dini, e quelli per cui vale la tesi.