

Alcuni esercizi sui primi argomenti di Matematica A.

1. Siano date due funzioni $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$. Dimostrare che se $f \circ g$ è iniettiva, allora g è iniettiva. Dimostrare anche che se $f \circ g$ è iniettiva e g è suriettiva, allora f è iniettiva.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Dimostrare che $f(x)$ è dispari, strettamente crescente e $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ è biiettiva. Trovare la funzione inversa di f .

3. Trovare, se esistono, massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore degli insiemi seguenti:

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\},$$
$$\{p^2 \mid p \in \mathbb{Z}\}, \quad \left\{ \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \left\{ 2^{-\frac{1}{n^2-4n+2}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

4. Trovare la funzione inversa di $h(x) = \sin(x + \pi)$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

5. Trovare il dominio di $g(x) = \arccos |x^3 - 1/2|$.

Esercizi sui numeri complessi

1. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\alpha = (1 - i)^3$.

2. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\alpha = (-1 + 2i)(-1 - 2i)$.

3. Esprimere in forma trigonometrica il numero complesso $\alpha = 1 - i$.

4. Esprimere in forma trigonometrica il numero complesso $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$.

5. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\alpha = (1 - i)^{37}$.

6. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})^{10}$.

7. Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$\alpha = 1 + \frac{4 - i}{1 + 2i}.$$

8. Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$\alpha = \frac{i(2 - i)}{5i - 1}.$$

9. Esprimere in forma trigonometrica il numero complesso $\alpha = (1 - i)^5(-1 + i\sqrt{3})$.

10. Esprimere in forma trigonometrica il numero complesso $\alpha = (1 - i)^5 / (-1 + i\sqrt{3})$.

11. Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$\alpha = \frac{\left\{ 2 \left(\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right) \right\}^3}{3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)}.$$

12. Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$\alpha = \left\{ 2 \left(\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right) \right\}^3 \cdot 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

13. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $(1/i)^4$.
14. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.
15. Risolvere l'equazione complessa $z^3 = -8$.
16. Risolvere l'equazione complessa $iz^3 + 1 = 0$.
17. Risolvere l'equazione complessa $z^2 = -1 - i\sqrt{3}$.
18. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $z^2 = -\sqrt{3} - i$.
19. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $iz^2 - 2z + 3i = 0$.
20. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $z^2 - (2 + 4i)z + 4i - 12 = 0$.
21. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $iz^2 + 2z - 2\sqrt{2} = 0$.
22. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $z^2 - 2z + 6(1 - 2i) = 0$.
23. Determinare un numero complesso z tale che $e^z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
24. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{\log 2 + i\frac{3}{4}\pi}$.
25. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $z^3 = (2 + 3i)^3$.
26. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa $z^4 = (3 + 4i)^4$.

Gli esercizi sui numeri complessi sono tratti da (e, in parte, svolti in): C. Zanella, Geometria - Teoria ed Esercizi, Esculapio, Bologna, 2002.