ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2004-2005

Equazioni differenziali alle derivate parziali

1. Risoluzione di equazioni alle derivate parziali con il metodo della separazione delle variabili: esercizi facoltativi

1) Determinare le soluzioni dei seguenti problemi:

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(x,0) &= \cos x/2, & x \in [0,\pi] \\ u_x(0,t) &= 0, & t > 0 \\ u(\pi,t) &= 0, & t > 0. \end{cases}$$

(soluzione: $u(x,t) = e^{-t/4} \cos x/2$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x \in [0,5] \\ u(x,0) &= 10 \sin(4\pi x), & x \in [0,5] \\ u(0,t) &= 0, & t > 0 \\ u(5,t) &= 0, & t > 0. \end{cases}$$

(soluzione: $u(x,t) = 10e^{-32\pi^2 t} \sin(4\pi x)$)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t), & t \in \mathbb{R}, 0 < x < \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \sin^3 x, & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) &= 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(sugg.: usare la formula di De Moivre per esprimere $\sin^3 x$ in funzione di $\sin x$ e $\sin 3x$; risultato: $u(x,t) = 3/4 \cos t \sin x - 1/4 \cos 3t \sin 3x$)

2) (La risoluzione del seguente esercizio è difficile. Non preoccuparsi se non si riesce.) Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + 2u_t(x,t) + u(x,t) &= u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(x,0) &= \cos x/2, & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) &= 0, & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) &= e^{-t}(\cos t/2 + 2\sin t/2), & x \in [0,\pi] \\ u(\pi,t) &= 0, & t > 0. \end{cases}$$

(soluzione: $u(x,t) = e^{-t}(\cos t/2 + 2\sin t/2) \cos x/2$)

L'equazione si chiama "del telegrafo", e modella la trasmissione di impulsi elettrici in un cavo con certe proprietà fisiche. Svolgimento guidato:

a) Cercare soluzioni della forma $u(x,t) = T(t)X(x)$: risultano due equazioni differenziali ordinarie: esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$T''(t) + 2T'(t) + (1-\lambda)T(t) = 0, \tag{1}$$

$$X''(x) = \lambda X(x). \tag{2}$$

b) Adesso bisogna risolvere (1) e (2) con le condizioni al contorno appropriate: il problema dà $T'(0) = 0$ e $X(\pi) = 0$. A queste aggiungiamo $T(0) = 1$ e $X(0) = 1$ (in realtà il problema suggerisce solo $T(0) \neq 0$ e $X(0) \neq 0$).
c) Uno sguardo alle condizioni $u(x, 0) = \cos x/2$ e $u(0, t) = e^{-t}(\cos t/2 + 2 \sin t/2) \cos x/2$ suggerisce di scegliere, tra le varie possibilità, $\lambda = -\omega^2$, con $\omega := \omega_k = 1/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $X(x) = c_1 \cos \omega_k x + c_2 \sin \omega_k x$, $T(t) = c_1 e^{-t} \cos \omega_k t + c_2 e^{-t} \sin \omega_k t$, $k \in \mathbb{Z}$. Una soluzione del problema per X è $X(x) = \cos x/2$, mentre di quello per T è $T(t) = e^{-t}(\cos t/2 + 2 \sin t/2)$.
d) $u(x, t) = T(t)X(x)$, con X e T dati sopra, è una soluzione.

2. Risoluzione di equazioni alle derivate parziali con la trasformata di Fourier : esercizi facoltativi

1) Determinare le soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si richiede di esprimere la soluzione nella forma più esplicita possibile e di giustificare i calcoli effettuati. (soluzione: $u(x,t) = e^{-x^2/(1+4t)}/\sqrt{1+4t}$).

2) Dato il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

si indichi con u la sua soluzione. Si provi che, per ogni fissato $t \geq 0$, la funzione $x \mapsto u(x,t)$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$. Si dia un'espressione di u usando una convoluzione.