Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica

Esercizi di Natale (Canale 1)

Gli esercizi che seguono sono tratti da diversi libri di testo. Il maggior numero è tratto, in particolare, da: Barutello, Conti, Ferrario, Terracini, Verzini, Analisi Matematica 2, Apogeo e da E. Giusti, Esercizi e complementi di analisi matematica 2, Boringhieri.

1. Determinare una parametrizzazione della curva γ, intersezione fra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e il cilindro a sezione ellittica di equazione $x^2 + 9y^2 = 9$.

$[\gamma(t) = \big(3\cos t, \sin t, 9\cos^2 t + \sin^2 t\big)]$

2. Determinare l'equazione della retta tangente e della retta normale alla curva $x(t) = \ln(1-t)\,,\ y(t) = t - t^2$, nel punto $(0,0)$.

$[x+y=0,\ x=y]$

3. Calcolare la lunghezza della curva formata dall'intersezione fra il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e il grafico della funzione $z = \ln y$, contenuta nel semispazio $y \geq 1$.

$[L = 4\ln(2+\sqrt{3})]$

4. Si dimostri che l'equazione

$$8\cosh(x^2 - y) - xy = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(2,4)$. Scrivere poi il polinomio di Taylor di f di secondo grado in un intorno di tale punto.

$[f(x) = 4 - 2(x-2) + 73(x-2)^2 + o((x-2)^2)]$

5. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$$

sull'insieme

$$E := \{(x,y)\,:\,|x| \leq 1\,, |y| \leq 1\,\}\,.$$

[Max uguale a 4 assunto in $(-1,-1)$, min uguale a $-1/2$, assunto in $(1/2,1/2)$]

6. Calcolare

$$\int_\gamma (y+2)dx + x\,dy\,,$$

dove γ è la curva di equazione $y = \log(1 + |x-1|)$, con $x \in [0,2]$.

$[2\log 2 + 2]$

7. Calcolare

$$\int_D (x^2 + y)\,dxdy\,,$$

dove D è la parte di corona circolare delimitata da $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ compresa fra le rette $y = x$ e $y = -x$.

$[15\pi/16 + 15/8]$

8. Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{e^{y/x^2}}{x^2y^2}\, dx\, dy\,,$$

ove D è la regione

$$D := \{(x,y)\ :\ x^2 \leq y \leq 2x^2\,,\ y^2 \leq x \leq 2y^2\,\}\,.$$

$[1/3\,(e^2 - e)]$

9. Calcolare il volume del solido contenuto dentro il cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2 = 1$ e compreso fra il piano xy e la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.

$[5\pi/2]$

10. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma\,,$$

ove Σ rappresenta la superficie

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ 1 \leq z \leq 2\}\,.$$

$[\frac{\pi}{3}\big(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17}\big)\ ]$

11. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\, d\sigma\,,$$

ove Σ rappresenta la superficie

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y,z) = \big(\sin(uv), \cos(uv), u\big)\,, (u,v) \in \Omega\}\,,$$

e

$$\Omega := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\ :\ \frac{1}{2} < u < v\,,\ v < 1\}\,.$$

$[1 - \log 2\ ]$

12. Usando la regola della catena, calcolare le derivate di $F(t,s) := f(x(t,s), y(t,s))$, ove

$$1)\ f(x,y) = e^x \sin y\,,\ , x = \sin t\,,\ y = t^2 + t\,;$$
$$2)\ f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}\ ,\ x = st\,,\ y = 3s + 2t\,.$$

$$[1)F_t = (e^{\sin t}\sin(t^2+t)\cos t\ + e^{\sin t}\cos(t^2+t)(2t+1)\,, F_s = 0]$$

$$[2)F_t = -(3s+2t)(st)^{-2}\Big(1+(3s+2t)^2/(st)^2\Big)^{-1} s + (st)^{-1}\Big(1+(3s+2t)^2/(st)^2\Big)^{-1} 2\,,$$

$$F_s = -(3s+2t)(st)^{-2}\Big(1+(3s+2t)^2/(st)^2\Big)^{-1} t + (st)^{-1}\Big(1+(3s+2t)^2/(st)^2\Big)^{-1} 3\,]$$