Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11
Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica
Foglio 2. Esercizi sulle curve

1. Sia γ una curva di equazione
$$r = r(\theta)\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi\,,$$
(in coordinate polari). Dimostrare che la lunghezza di γ è data da
$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(r(\theta)\big)^2 + \big(r'(\theta)\big)^2}\, d\theta\,.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva (*cardioide*) di equazione
$$r = a(1+\cos\theta)\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$
($a > 0$ fissato). [R: $8a$]

3. Calcolare la lunghezza della curva (*spirale logaritmica*) di equazione
$$r = e^{\lambda\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$
($\lambda < 0$ fissato). [R: $\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}(e^{2\pi\lambda} - 1)$]

4. Data la cardioide γ di equazione
$$r = a(1+\cos\theta)\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,\ a > 0 \text{ fissato,}$$
(1) determinare una parametrizzazione di γ;
(2) trovare i punti di γ a tangente orizzontale o verticale.

5. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie
$$\int_\gamma f\, ds\,,$$
ove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x, y, z) := x\sqrt{1 + 4y}$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è l'arco di curva descritto dalle equazioni parametriche $x(t) = \cos t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = \sin t$.
[R: 16π]

6. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie
$$\int_\varphi g\, ds\,,$$
ove $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita da
$$g(x, y, z) := \frac{x^2 + y}{\sqrt{2 + 4z^2}}$$
e $\varphi : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ è l'arco di curva, giacente nel semispazio $\{(x, y, z) \,:\, y \le 0\}$, descritto dalle equazioni parametriche $x(t) = t$, $y(t) = t^2 - 4$, $z(t) = t$.
[R: -16/3]

7. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y) = (-y, x)\,.$$

Determinare gli integrali curvilinei di seconda specie $\int_{\gamma_1} F$, $\int_{\gamma_2} F$ e $\int_{\gamma_3} F$, ove

- γ_1 rappresenta la circonferenza unitaria percorsa una volta in senso antiorario;
- γ_2 rappresenta la spirale di equazione (in coordinate polari) $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
- γ_3 rappresenta l'arco di cicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t)\,, \end{cases}$$

al variare di $t \in [0, 2\pi]$ ($a > 0$ fissato).

[R: 2π; $\frac{8}{3}\pi^3$, $-6\pi a^2$]

8. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

(1) $\int y^2\,dx + 2xy\,dy$ sulla circonferenza di raggio $R > 0$ e centro $(0, 0)$;

(2) $\int yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ sull'arco di elica cilindrica $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $z(t) = kt$, $t \in [0, 2\pi]$, $k > 0$ fissato;

(3) $\int \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, lungo il segmento $x = y$ da $x = 1$ a $x = 2$.

[R: 0; 0; $\log 2$]