Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e MeccanicaMeccatronica,
V. Casarino P. Mannucci (2010-2011)

Foglio 3
Esercizi su forme differenziali lineari ed integrali di seconda specie (alcuni con cenno di soluzione).

1. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{x^2}{(x^2-y^2)^{1/2}}\,dx + \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy,$$

dove γ é la curva data da $y = x^2$ con $1/2 \le x \le 1/\sqrt{3}$ con l' orientamento delle x crescenti.

Sol. Dalla definizione di integrale di una forma differenziale, si ha

$$\int_\gamma \frac{x^2}{(x^2-y^2)^{1/2}}\,dx + \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy = \int_{1/2}^{1/\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{(x^2-x^4)^{1/2}}1 + \frac{x^3}{x^2+x^4}2x\right]dx.$$

Dividendo i due integrali:

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx = \text{ (sost. } s = 1-x^2) \; = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{s^{1/2}}\,ds = -s^{1/2}+c = -(1-x^2)^{1/2}+c,$$

$$\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = 2x - 2\arctan x + c.$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{x^2}{(x^2-y^2)^{1/2}}\,dx + \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy = [-(1-x^2)^{1/2} + 2x - 2\arctan x]_{1/2}^{1/\sqrt{3}}.$$

2. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy,$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $\pi/4 \le t \le \pi/2$.

Sol. Dalla definizione di integrale di una forma differenziale, segue che

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{\cos^2 t}{\sin t}(-\sin t) + \sin t\cos t\right]dt.$$

Dividendo i due integrali,

$$-\int \cos^2 t\,dt = \text{ (int.notevole) } = -\frac{t+\sin t\cos t}{2} + c,$$

$$\int \sin t\cos t\,dt = \text{ (sost.} s = \sin t) \; = \int s\,ds = \frac{\sin^2 t}{2} + c.$$

Quindi,

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \left[-\frac{t+\sin t\cos t}{2} + \frac{\sin^2 t}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}.$$

3. Dire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = [1+\cos(x+y)]dx + \cos(x+y)dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita come segue: $x = \cos^{35} t$, $y = \sin^{35} t$, con $0 \le t \le \pi/2$.

Sol. Il dominio delle due componenti della forma é il piano, convesso. Inoltre la forma é chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}[1+\cos(x+y)] = -\sin(x+y) = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+y).$$

Quindi é esatta. Per trovare un potenziale $U(x,y)$, usiamo la stessa definizione di primitiva: deve valere

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = 1+\cos(x+y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \cos(x+y).$$

Integriamo la prima espressione in x:

$$U(x,y) = x + \sin(x+y) + g(y),$$

deriviamola in y e poniamola uguale alla $\frac{\partial}{\partial y}U(x,y)$ di sopra per determinare $g(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \cos(x+y) + g'(y) = \cos(x+y),$$

da cui segue che $g'(y) = 0$, cioé $g(y) = c$. Quindi, il potenziale é

$$U(x,y) = x + \sin(x+y) + c.$$

Detta φ la curva data, per un teorema sulle forme differenziali esatte, vale

$$\int_\varphi \omega = U(x(\pi/2), y(\pi/2)) - U(x(0), y(0)) = U(0,1) - U(1,0) = \sin 1 - 1 - \sin 1 = -1.$$

4. Dire se la seguente forma differenziale é esatta se ristretta al primo quadrante e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = \frac{x+2y}{x^3y}dx + \frac{1}{xy^2}dy.$$

Sol. Il primo quadrante (aperto, cioé con $x > 0$ e $y > 0$) é convesso. Inoltre la forma é chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+2y}{x^3y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{xy^2}.$$

Quindi é esatta. Per trovare un potenziale $U(x,y)$, procediamo come nell' es. 9:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = \frac{x+2y}{x^3y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \frac{1}{xy^2}.$$

Integriamo la seconda espressione in y:

$$U(x,y) = -\frac{1}{xy} + g(x),$$

deriviamola in x e poniamola uguale alla $\frac{\partial}{\partial x}U(x,y)$ di sopra per determinare $g(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = \frac{1}{x^2y} + g'(x) = \frac{x+2y}{x^3y} = \frac{1}{x^2y} + \frac{2}{x^3},$$

da cui segue che $g'(x) = 2x^{-3}$, cioé $g(x) = -\frac{1}{x^2} + c$. Quindi, il potenziale é

$$U(x,y) = -\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2} + c.$$

5. Dire se la seguente forma differenziale é esatta nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, calcolare una sua primitiva:

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita, in coordinate polari, come segue: $\rho = 2 - \cos\theta$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Sol. L' insieme di definizione di ω é il piano meno l' origine, quindi non é semplicemente connesso. Peró, la forma é chiusa e procedendo come sopra é facile calcolarne una primitiva:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c,$$

definita in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Poiché la curva lungo cui si vuole calcolare l' integrale non passa per $(0,0)$ ed é chiusa, per un teorema sulle forme differenziali esatte, vale $\int_\rho \omega = 0$.
Attenzione: la condizione che A sia semplicemente connesso non é necessaria perché una forma chiusa sia esatta, ma solo sufficiente! (Non appena si riesce a trovare una primitiva definita su A, per definizione la forma é esatta in A!)

6. Individuare l'insieme di definizione della seguente forma differenziale lineare:

$$\omega = \frac{2x}{y\,(x^2+y^2)^{2/3}}dx - \frac{(3x^2+y^2)}{y^2\,(x^2+y^2)^{2/3}}dy.$$

Determinare un aperto connesso in cui sia esatta e calcolarne ivi una primitiva.

7. Fissati a, $b \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente campo vettoriale:

$$F(x,y) = \left(2\pi\arctan(y^2) + \sin(bx+y+a), \frac{(2\pi - a)xy}{1+y^4} + \sin(x+y)\right).$$

– Determinare i valori dei parametri a, b tali da rendere il campo conservativo.
– Per tali valori calcolare un potenziale.

8. Stabilire in quali regioni del piano la forma differenziale

$$\frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2}\,dx + \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}\,dy$$

è esatta. Calcolare poi il suo integrale lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = (t, \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos t} + \frac{3}{2} + t) \qquad t \in [0,1].$$

9. Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y(\log y - 1)}{x^2+1}\,dx + \arctan x \log y\,dy,$$

definita in $\Omega = \{(x,y) \in \Re^2 \,|\, y > 0\}$.
i. Si dica se è chiusa.
ii. Si dica se è esatta e se ne trovino tutte le eventuali primitive.
iii. Fra tutte le primitive si trovi quella che vale π nel punto $(-1,1)$.
iv. Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazione $y = -x^3+3$, $x \in [-1,1]$.

10. Dire se le seguenti forme differenziali lineari in tre variabili sono differenziali esatti e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva:
i)

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz;$$

ii)

$$-\frac{y+z}{(x-y-z)^2}\,dx + \frac{x}{(x-y-z)^2}\,dy + \frac{x}{(x-y-z)^2}dz.$$

Altri esercizi svolti su curve ed integrali.

1. Trovare l'ascissa del baricentro della curva piana in coordinate polari: $\rho = e^{k\theta}$, $0 < \theta < \pi$ $(k > 0)$.

Sol. L' ascissa del baricentro é data dalla formula: $x_G = \frac{1}{L(\rho)} \int_\rho x$. Calcoliamo quindi

$$L(\rho) = \int_0^\pi \sqrt{e^{2k\theta} + k^2 e^{2k\theta}}\,d\theta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(e^{k\pi} - 1).$$

Allora

$$x_G = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}(e^{k\pi}-1)} \int_0^\pi e^{2k\theta} \cos\theta \sqrt{1+k^2}\,d\theta = \frac{k}{(e^{k\pi}-1)} \int_0^\pi e^{2k\theta}\cos\theta\,d\theta.$$

Calcoliamo a parte, integrando per parti due volte...

$$\int_0^\pi e^{2k\theta}\cos\theta\,d\theta = -2k(1+e^{2k\pi}) - 4k^2 \int_0^\pi e^{2k\theta}\cos\theta\,d\theta,$$

da cui si ottiene

$$(1+4k^2)\int_0^\pi e^{2k\theta}\cos\theta\,d\theta = -2k(1+e^{2k\pi}),$$

che sostituito in x_G diventa

$$x_G = -\frac{2k^2(1+e^{2k\pi})}{(1+4k^2)(e^{k\pi}-1)}.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva seguente:

$$\begin{cases} x = 1 - \cos t + (2-t)\sin t \\ y = \sin t + (2-t)\cos t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2.$$

Sol. Dalla definizione di lunghezza, detta φ la curva data, segue

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(2-t)^2\cos^2 t + (2-t)^2 \sin^2 t + 1}\, dt = \ (\text{sost.} s = 2-t) \ = \int_0^2 \sqrt{s^2+1}\, dt.$$

L' integrale $\int \sqrt{s^2+1}\, dt$ un integrale notevole (da ricordare!): si calcola usando la sostituzione $s = \sinh\theta$ (seno iperbolico) e si ottiene

$$\int \sqrt{s^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\log(s+\sqrt{1+s^2}) + \frac{s}{2}\sqrt{1+s^2} + c.$$

Quindi

$$L(\varphi) = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) + \sqrt{5}.$$

3. Data la curva $\varphi(t) = (R\sin t, R\cos t, ht)$ con $0 < t < 2$, determinare l' integrale curvilineo di $f(x,y,z) = xyz$ lungo φ.

Sol. Dalla definizione di integrale curvilineo, si ha

$$\int_\varphi xyz = \int_0^2 hR^2 t \sin t \cos t \sqrt{R^2+h^2}\, dt,$$

e usando le formule di duplicazione

$$\int_\varphi xyz = \frac{hR^2\sqrt{R^2+h^2}}{2}\int_0^2 t\sin(2t)\, dt = \frac{hR^2\sqrt{R^2+h^2}}{2}\left(-\cos 4 + \frac{1}{4}\sin 4\right),$$

dove il risultato si ottiene integrando una volta per parti.

4. Date una funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e una curva in coordinate polari $\rho = \theta$ con $\theta \in [0,\pi]$, dire quale delle seguenti affermazioni é corretta.
(a) $\int_\rho f = \frac{\pi^2}{2}$;
(b) $\int_\rho f = \frac{1}{3}[(1+\pi^2)^{3/2} - 1]$;
(c) $\int_\rho f = \frac{2}{3}\pi^{3/2}$.

Sol. (b) (Calcolare $\int_\rho f$).

5. Determinare il versore tangente alla curva

$$\gamma: \quad \begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(3t) \\ z = \log(2\sin(3t)) \qquad t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

in $(0, 1, \log 2)$.

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = \frac{x^2+y}{\sqrt{2+4z^2}}$, calcolare $\int_\gamma f$ dove γ è l'arco di curva, giacente nel semispazio $\{y \leq 0\}$, definito da

$$\gamma: \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 4 \\ z = t \qquad t \in [-2, 2]\,. \end{cases}$$